補充問題 1	合同式による曜日の決定	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

(Ⅰ) 今日は，水曜日である。次に示す各 n について，この日から n 日目の曜日を求めよ。

(1) $n=100$　(2) $n=10^{15}$　(3) $n=3^{17}$

(Ⅱ) 今日は，土曜日である。次に示す各 n について，この日から n 日目の曜日を求めよ。

(1) $n=150$　(2) $n=10^{12}$　(3) $n=5^{19}$

ヒント！ (Ⅰ) $\underbrace{n\equiv1\pmod 7}_{n=1,\ 8,\ 15,\ 22,\ \cdots\text{のこと}}$ のとき，木曜日であり，$\underbrace{n\equiv2\pmod 7}_{n=2,\ 9,\ 16,\ 23,\ \cdots\text{のこと}}$ のとき金曜日となるんだね。以下同様だ。(Ⅱ) $n\equiv1\pmod 7$ のとき日曜日であり，$n\equiv2\pmod 7$ のとき月曜日となる。これも，以下同様だ。合同式により，曜日を決定しよう！

解答＆解説

(Ⅰ) 今日は水曜日なので，

(i) $\underbrace{n\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 7)}_{n=1,\ 8,\ 15,\ 22,\ \cdots}$ のとき，木曜日，(ii) $\underbrace{n\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 7)}_{n=2,\ 9,\ 16,\ 23,\ \cdots}$ のとき，金曜日

(iii) $\underbrace{n\equiv3\ (\mathrm{mod}\ 7)}_{n=3,\ 10,\ 17,\ 24,\ \cdots}$ のとき，土曜日，(iv) $\underbrace{n\equiv4\ (\mathrm{mod}\ 7)}_{n=4,\ 11,\ 18,\ 25,\ \cdots}$ のとき，日曜日

(v) $\underbrace{n\equiv5\ (\mathrm{mod}\ 7)}_{n=5,\ 12,\ 19,\ 26,\ \cdots}$ のとき，月曜日，(vi) $\underbrace{n\equiv6\ (\mathrm{mod}\ 7)}_{n=6,\ 13,\ 20,\ 27,\ \cdots}$ のとき，火曜日

(vii) $\underbrace{n\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 7)}_{n=0,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ \cdots}$ のとき，水曜日　となる。

(1) $n=\underbrace{100}_{7\times14+2}\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 7)$ より，$n=100$ 日目は，金曜日である。……(答)

(2) $n=\underbrace{10^{15}}_{3\ (\mathrm{mod}\ 7)}\equiv\underbrace{3^{15}}_{3^{2\times7+1}}\equiv(\underbrace{3^2}_{9\equiv2\ (\mathrm{mod}\ 7)})^7\times3\equiv\underbrace{2^{\boxed{7}}}_{(2^3)^2\times2=(8)^2\times2\equiv1^2\times2}\times3\equiv1^2\times2\times3\equiv6\ (\mathrm{mod}\ 7)$

（$7=3\times2+1$，$8\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 7)$）

よって，$n=10^{15}$ 日目は，火曜日である。…………(答)

(3) $n = 3^{17} = 3^{2\times8+1} = (\underbrace{3^2}_{9\equiv2\,(\mathrm{mod}\ 7)})^8 \times 3 \equiv 2^{\boxed{8}} \times 3$ $\quad$ ($\boxed{3\times2+2}$)

$\equiv (\underbrace{2^3}_{8\equiv1\,(\mathrm{mod}\ 7)})^2 \times 2^2 \times 3 \equiv \underbrace{1^2 \times 4 \times 3}_{12} \equiv 5 \pmod 7$

$\therefore\ n = 3^{17}$ 日目は，月曜日である。……………………………………(答)

(Ⅱ) 今日は土曜日なので，

(ⅰ) $n \equiv 1 \pmod 7$ のとき，日曜日，(ⅱ) $n \equiv 2 \pmod 7$ のとき，月曜日
(ⅲ) $n \equiv 3 \pmod 7$ のとき，火曜日，(ⅳ) $n \equiv 4 \pmod 7$ のとき，水曜日
(ⅴ) $n \equiv 5 \pmod 7$ のとき，木曜日，(ⅵ) $n \equiv 6 \pmod 7$ のとき，金曜日
(ⅶ) $n \equiv 0 \pmod 7$ のとき，土曜日　となる。

(1) $n = \underbrace{150}_{7\times21+3} \equiv 3 \pmod 7$ より，$n = 150$ 日目は，火曜日である。……(答)

(2) $n = \underbrace{10}_{3\,(\mathrm{mod}\ 7)}{}^{12} \equiv 3^{\boxed{12}} \equiv (\underbrace{3^2}_{9\equiv2\,(\mathrm{mod}\ 7)})^6 \equiv 2^6$ $\quad$ ($\boxed{2\times6}$)

$\equiv (\underbrace{2^3}_{8\equiv1\,(\mathrm{mod}\ 7)})^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod 7$

$\therefore\ n = 10^{12}$ 日目は，日曜日である。……………………………………(答)

(3) $n = 5^{19} = 5^{2\times9+1} = (\underbrace{5^2}_{25\equiv4\,(\mathrm{mod}\ 7)})^9 \times 5 \equiv \underbrace{4^9}_{(2^2)^9=2^{18}=2^{3\times6}} \times 5$

$\equiv (\underbrace{2^3}_{8\equiv1\,(\mathrm{mod}\ 7)})^6 \times 5 \equiv 1^6 \times 5 \equiv 5 \pmod 7$

$\therefore\ n = 5^{19}$ 日目は，木曜日である。……………………………………(答)