

範囲を押さえる整数問題 (II)

演習問題 66

難易度 ★★★

CHECK 1

CHECK 2

CHECK 3

次の等式と不等式を同時に満たす整数 x, y, z の値を求めよ。

$$\begin{cases} x + y + z = 5 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 3y + 7z = 32 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x < y < z & \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

(東北学院大)

ヒント! ③で、 x, y, z の大小関係は与えられているが、 x, y, z は整数なので、これらは負の値も取り得ることに注意しよう。①、②より、 x と z を共に y で表して、これらを③に代入して、 y の不等式を作ると、これから y の取り得る値の範囲が得られるんだね。この範囲内の整数 y の値を①、②に代入して x と z の値を求めればよい。

解答&解説

$$\begin{cases} x + y + z = 5 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 3y + 7z = 32 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \underline{x} < \underline{y} < \underline{z} & \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \quad (x, y, z : \text{整数}) \end{cases}$$

について、

(i) ② - 2 × ① より、 $y + 5z = 22$

$$\therefore z = \frac{22 - y}{5} \cdots \cdots \textcircled{4} \quad \text{となる。}$$

(ii) 7 × ① - ② より、 $5x + 4y = 3$

$$\therefore x = \frac{3 - 4y}{5} \cdots \cdots \textcircled{5} \quad \text{となる。}$$

(i)(ii)の④と⑤を③に代入すると、

$$\frac{\underline{3 - 4y}}{\underline{5}} < y < \frac{\underline{22 - y}}{\underline{5}} \cdots \cdots \textcircled{6} \quad \text{となる。よって、}$$

(i)
(ii)

(i) $\frac{3 - 4y}{5} < y$ より、 $\frac{1}{3} < y \cdots \cdots \textcircled{6}'$

(ii) $y < \frac{22 - y}{5}$ より、 $y < \frac{11}{3} \cdots \cdots \textcircled{6}''$ となる。

⑥', ⑥'' より、

ココがポイント

⇐ ①、②より、
 (i) x を消去して、
 $z = (y \text{ の式 })$ とし、
 (ii) z を消去して、
 $x = (y \text{ の式 })$ として、
 これらを③に代入して、整数 y の取り得る値の範囲を押さえる。

⇐ ⑥の不等式は、(i)と(ii)の2つに分けて y の範囲を押さえよう。

⇐ $3 - 4y < 5y, 3 < 9y$

$$\therefore \frac{1}{3} < y$$

⇐ $5y < 22 - y, 6y < 22$

$$\therefore y < \frac{11}{3}$$

$\frac{1}{3} < y < \frac{11}{3}$ となる。ここで、 y は整数より、

$$\boxed{0.33\dots} \quad \boxed{3.66\dots}$$

$y = 1, 2, 3$ となる。

(i) $y = 1$ のとき、①、②は、

$$\begin{cases} x + z = 4 & \dots\dots\dots ①' \\ 2x + 7z = 29 & \dots\dots\dots ②' \end{cases} \text{となる。}$$

②' - 2 × ①' より、 $5z = 21 \therefore z = \frac{21}{5}$ となって、不適。

(ii) $y = 2$ のとき、①、②は、

$$\begin{cases} x + z = 3 & \dots\dots\dots ①'' \\ 2x + 7z = 26 & \dots\dots\dots ②'' \end{cases} \text{となる。}$$

②'' - 2 × ①'' より、 $5z = 20 \therefore z = 4$

①'' より、 $x = -1$

$\therefore x = -1, y = 2, z = 4$ となる。

(iii) $y = 3$ のとき、①、②は、

$$\begin{cases} x + z = 2 & \dots\dots\dots ①''' \\ 2x + 7z = 23 & \dots\dots\dots ②''' \end{cases} \text{となる。}$$

②''' - 2 × ①''' より、 $5z = 19 \therefore z = \frac{19}{5}$ と

なって、不適。

以上 (i)(ii)(iii) より、①、②、③を同時に満たす

整数 x, y, z の値は、

$x = -1, y = 2, z = 4$ の 1 組だけである。……(答)

⇐これから、(i) $y = 1$,

(ii) $y = 2$, (iii) $y = 3$ の 3 つの場合について、 x, z の値を調べよう。

⇐ z は、整数ではないので、不適だね。

⇐ x は、負でも整数なので、解となる。また、 $x < y < z$ もみたしている。

⇐ z は、整数ではないので、これも不適になる。

参考

今回は、 x と z を、 y で表して、③により、 y の値の範囲を押さえたが、
 (I) x と y を、 z で表して、③により、 z の値の範囲を押さえてもよいし、
 (II) y と z を、 x で表して、③により、 x の値の範囲を押さえても構わない。
 同じ結果が得られることを各自確認してみよう。