練習問題 53　二項分布と正規分布　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

二項分布 $B(n,\ p)$ の平均 m と分散 σ^2 は，$m = np$，$\sigma^2 = npq$ $(q = 1-p)$である。ここで，nが十分に大きいとき，二項分布は連続型の正規分布 $N(np,\ npq)$で近似的に表すことができる。

$B\left(288,\ \dfrac{1}{3}\right)$のとき，次の各確率の近似値を，右の標準正規分布の確率の表を用いて求めよ。

(ⅰ) $P(100 \leqq X \leqq 104)$　　(ⅱ) $P(90 \leqq X \leqq 100)$

標準正規分布の確率の表

$$\alpha = \int_a^{\infty} f_S(z)dz$$

a	確率 α
0.5	0.3085
0.75	0.2266
1	0.1587

二項分布 $B\left(288,\ \dfrac{1}{3}\right)$ は，$n = 288$，$p = \dfrac{1}{3}$，$q = 1 - p = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ で，nは十分に大きな数と考えていいんだね。よって，この二項分布は，その平均 $m = np$ と分散 $\sigma^2 = npq$をもつ正規分布 $N(\underbrace{np}_{m},\ \underbrace{npq}_{\sigma^2})$で近似することができる。これから，変数 X を新たな確率変数 $Z = \dfrac{X-m}{\sigma}$ に置き換えて，標準正規分布の確率の表を使って解いていけばいいんだね。頑張ろう！

二項分布 $B\left(\underbrace{288}_{n},\ \underbrace{\dfrac{1}{3}}_{p}\right)$ の平均 m と分散 σ^2 は，

$n = 288$，$p = \dfrac{1}{3}$，$q = 1 - p = \dfrac{2}{3}$ より，

$m = np = 288 \times \dfrac{1}{3} = 96$，$\sigma^2 = npq = 288 \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{2}{3} = 64 = 8^2$ となる。

ここで，$n = 288$ は十分に大きな数と考えてよいので，この二項分布は，正規分布 $N(\underbrace{96}_{m=np},\ \underbrace{8^2}_{\sigma^2=npq})$ で近似的に表すことができる。

よって，正規分布 $N(\underbrace{96}_{m},\ \underbrace{8^2}_{\sigma^2})$ の平均 $m = 96$，標準偏差 $\sigma = 8$ より，これに

従う確率変数 X を使って，新たな確率変数 Z を，

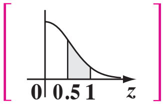
$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{X-96}{8}$ で定義すれば，Z は標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数になるんだね。これから，各確率を求めよう。

(1) $100 \leqq X \leqq 104$ のとき，$\underbrace{\dfrac{100-96}{8}}_{\frac{4}{8}=0.5} \leqq \underbrace{\dfrac{X-96}{8}}_{Z} \leqq \underbrace{\dfrac{104-96}{8}}_{\frac{8}{8}=1}$ より，

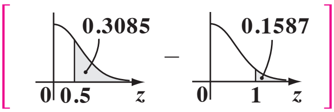
各辺から $m=96$ を引いて，$\sigma=8$ で割る。

求める確率 $P(100 \leqq X \leqq 104)$ は，確率の表より，

$P(100 \leqq X \leqq 104)=P(0.5 \leqq Z \leqq 1)$



$=P(0.5 \leqq Z)-P(Z \leqq 1)=0.3085-0.1587$



$=0.1498$ となる。

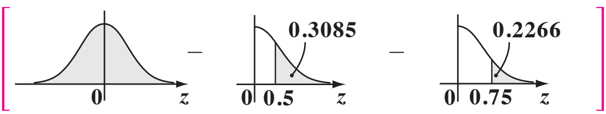
(2) $90 \leqq X \leqq 100$ のとき，$\underbrace{\dfrac{90-96}{8}}_{-\frac{6}{8}=-0.75} \leqq \underbrace{\dfrac{X-96}{8}}_{Z} \leqq \underbrace{\dfrac{100-96}{8}}_{\frac{4}{8}=0.5}$ より，

求める確率 $P(90 \leqq X \leqq 100)$ は，

$P(90 \leqq X \leqq 100)=P(-0.75 \leqq Z \leqq 0.5)$

$f_S(z)$ の $z=0$ に関する対称性から，こんな計算ができるんだね。

$=\quad 1 \quad - \quad P(0.5 \leqq Z) \quad - \quad P(0.75 \leqq Z)$



$=1-0.3085-0.2266=0.4649$ となって，答えだ！

以上で，今日の講義は終了です！ みんな，よく頑張ったね。お疲れ様！次回は，"統計的推測（とうけいてきすいそく）"について講義しよう。また，分かりやすく教えるから，楽しみに待っていてくれ！