補充問題 6	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

原点を **O** とする座標空間に 3 つの点 $\mathbf{A}(3,0,0)$，$\mathbf{B}(0,2,0)$，$\mathbf{C}(0,0,1)$ がある。

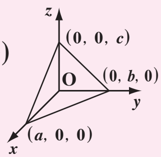
(1) **O** から 3 点 **A**，**B**，**C** を含む平面に垂線を下し，この平面と垂線との交点を **H** とする。点 **H** の座標を求めよ。

(2) 四面体 **OABC** に内接する球の半径 r を求めよ。　(早稲田大＊)

ヒント！ (1) 3 点 A, B, C を通る平面の方程式は $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ となるんだね。(2) 内接球の内心を **I** とおいて，四面体 **OABC** の体積 V を **I** を頂点とする 4 つの四面体の体積の総和で表すことにより，内接球の半径 r を求めることができる。

基本事項

3 点 $(a,\ 0,\ 0)$，$(0,\ b,\ 0)$，$(0,\ 0,\ c)$ を通る平面の方程式は，



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \cdots①$$

で表される。

この 3 点の座標を①に代入して，成り立つことから確認できる。

(1) 3 点 $\mathbf{A}(3,0,0)$，$\mathbf{B}(0,2,0)$，$\mathbf{C}(0,0,1)$ を通る平面を π とおくと，この方程式は，

平面 π：$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1$ より，

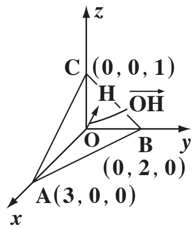
$2x+3y+6z=6 \cdots\cdots①$ となる。

よって，この法線ベクトルを $\vec{n}$ とおくと，$\vec{n}=(2,3,6)$ である。

原点 **O** から平面 π に下ろした垂線の足を $\mathbf{H}(x_1,y_1,z_1)$ とおくと，これは平面 π 上の点より，これらの座標を①に代入して，

$2x_1+3y_1+6z_1$
$=6 \cdots\cdots②$

となる。



また，$\overrightarrow{OH}$ と平面 π は直交するので，

$\overrightarrow{OH}/\!/\vec{n}$ より，定数 k を用いて，

$\overrightarrow{OH}=(x_1,y_1,z_1)=k\vec{n}$

$=k(2,3,6)=(2k,3k,6k) \cdots\cdots③$

となる。よって，

$x_1=2k,\ y_1=3k,\ z_1=6k$ であり，

これらを②に代入して，

$4k+9k+36k=6$

$49k=6 \quad \therefore k=\frac{6}{49}$ となる。

これを③に代入して，

$\overrightarrow{OH}=\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$

$\therefore$ **H** の座標は，$\mathbf{H}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$

である。……………………………(答)

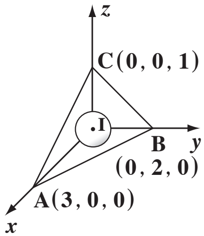
(2) この四面体 OABC の体積を V とおくと，

$$V=\frac{1}{3}\times\underbrace{\triangle OAB}_{\substack{\text{底面積}\\ \frac{1}{2}\times3\times2}}\times\underbrace{OC}_{\text{高さ }1}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times2\times1$$

$\therefore\ V=1$ ……④ となる。

ここで，四面体 OABC の内接球の中心を I とおき，その半径を r とおくと，



四面体 OABC の体積 V は，次の 4 つの四面体の体積の緩和となる。

(i) 四面体 IOAB の体積 V_1

$$V_1=\frac{1}{3}\times\underbrace{\triangle OAB}_{\text{底面積 }\frac{1}{2}\times3\times2=3}\times r=r\text{……⑤}$$

(ii) 四面体 IOBC の体積 V_2

$$V_2=\frac{1}{3}\times\underbrace{\triangle OBC}_{\text{底面積 }\frac{1}{2}\times2\times1=1}\times r=\frac{1}{3}r\ \text{…⑥}$$

(iii) 四面体 IOCA の体積 V_3

$$V_3=\frac{1}{3}\times\underbrace{\triangle OCA}_{\text{底面積 }\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}}\times r=\frac{1}{2}r\ \text{…⑦}$$

(iv) 四面体 IABC の体積 V_4 について，

底面の△ABC の面積は，

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(0,2,0)-(3,0,0)$$
$$=(-3,2,0)$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(0,0,1)-(3,0,0)$$
$$=(-3,0,1)$$

$|\overrightarrow{AB}|^2=9+4=13,\ |\overrightarrow{AC}|^2=9+1=10$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-3)^2+0+0=9$ より，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{13\times10-9^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{49}=\frac{7}{2}$$

よって，

$$V_4=\frac{1}{3}\times\underbrace{\triangle ABC}_{\text{底面積 }\frac{7}{2}}\times r=\frac{7}{6}r\ \text{…⑧}$$

以上 (i) ～ (iv) の⑤～⑧より，

$$\underbrace{V}_{1}=\underbrace{V_1}_{r}+\underbrace{V_2}_{\frac{1}{3}r}+\underbrace{V_3}_{\frac{1}{2}r}+\underbrace{V_4}_{\frac{7}{6}r}$$

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{7}{6}\right)}_{\frac{6+2+3+7}{6}=\frac{18}{6}=3}r=1$$

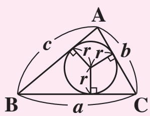
$\therefore\ r=\dfrac{1}{3}$ である。 ……………(答)

参考

これは，△ABC の内接円の半径 r を求める公式：

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot r$$

(S：△ABC の面積)



の立体ヴァージョンと考えることができるんだね。