漸化式と数学的帰納法

絶対暗記問題 47　難易度★★　CHECK1　CHECK2　CHECK3

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3^na_n+4}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されている。このとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して，$a_n>0$ ……② となることを，数学的帰納法により示せ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ ……③ とおいて，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

ヒント！ (1) は，(i) $a_1=1>0$，(ii) $a_k>0$ と仮定して，$a_{k+1}>0$ を示せばいいんだね。(2) では，$a_n>0$ より，この逆数をとっても分母は 0 にならない。よって，①の両辺の逆数をとって，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}$ とおいて，b_n の漸化式にもちこもう。(3) は，(2) からすぐに求まるはずだ。

解答＆解説

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3^na_n+4}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，

$a_n>0$ ……② $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを数学的帰納法により示す。

(i) $n=1$ のとき，$a_1=1>0$ となって成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ $a_k>0$ と仮定すると，①より，

$a_{k+1}=\dfrac{a_k}{3^k\cdot a_k+4}>0$ $(\because a_k>0,\ 3^k>0,\ 4>0)$ となって，

$n=k+1$ のときも成り立つ。

以上(i)，(ii)より，すべての自然数 n に対して，$a_n>0$ ……②は成り立つ。

……(終)

(2) ②より，$a_n>0$ より，$\dfrac{1}{a_n}>0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

よって，①の両辺の逆数をとっても，分母が 0 になることはないので，

$$\underbrace{\frac{1}{a_{n+1}}}_{b_{n+1}}=\frac{3^na_n+4}{a_n}=3^n+\frac{4}{a_n}=4\cdot\underbrace{\frac{1}{a_n}}_{b_n}+3^n \quad\cdots\cdots④$$

ここで，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ ……③ とおくと，

$\dfrac{1}{\underbrace{a_{n+1}}_{b_{n+1}}}=4\cdot\dfrac{1}{\underbrace{a_n}_{b_n}}+3^n$ ……④

$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{1}$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}$

となる。よって，$b_1=1$ と④より，数列 $\{b_n\}$ の漸化式が次のように導ける。

$b_1=1$，$b_{n+1}=4b_n+3^n$ ……⑤ $(n=1，2，3，\cdots)$

⑤を変形して次式になるものとする。

$b_{n+1}+\alpha\cdot 3^{n+1}=4(b_n+\alpha\cdot 3^n)$ ……⑥

$[\quad F(n+1)\quad =4\cdot\quad F(n)\quad]$

漸化式：$b_{n+1}=4b_n+3^n$
の形から，
$b_{n+1}+\alpha\cdot 3^{n+1}=4\ (b_n+\alpha\cdot 3^n)$
$[\quad F(n+1)\quad =4\cdot\ F(n)\ ]$
をみたす定数 α を求めよう

⑥を変形して，

$b_{n+1}=4b_n+4\alpha\cdot 3^n-3\alpha\cdot 3^n=4b_n+\underbrace{\alpha}_{1\ (⑤との比較から)}\cdot 3^n$ ……⑦ となる。

⑤と⑦を比較して，

$\alpha=1$

これを⑥に代入して，

$b_{n+1}+3^{n+1}=4(b_n+3^n)\quad [F(n+1)=4\cdot F(n)]$

$b_n+3^n=(\underbrace{b_1}_{1}+3^1)\cdot 4^{n-1}\quad [F(n)=F(1)\cdot 4^{n-1}]$

アッという間！

これに，$b_1=1$ を代入すると，数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n は，

$b_n=(1+3)\cdot 4^{n-1}-3^n=4^n-3^n$ ……⑧ $(n=1，2，3，\cdots)$ となる。

……(答)

(3) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ ……③ より，$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ ……③′ である。

よって，③′に⑧を代入すると，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n は次のように求まる。

$a_n=\dfrac{1}{4^n-3^n}$ $(n=1，2，3，\cdots)$ ……………………………………………(答)