(v) $n \equiv 4 \pmod{5}$ のとき，← 具体的には $n = 4, 9, 14, 19, \cdots$ のこと

$n^4 \equiv 4^4 \equiv (\underbrace{4^2}_{16 \equiv 1})^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{5}$ より，

n^4 を 5 で割った余りは $\underline{\underline{1}}$ である。

以上 (i)(ii)(iii)(iv)(v) より，「任意の正の整数 n について，n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 のみである」ことが示せたんだね。

これから，どんな正の整数 n であっても n^4 を 5 で割ったとき，その余りは必ず 0 または 1 となるので，余りが 2 や 3 や 4 となることはあり得ないことが分かったんだね。

以上より，

「どんな正の整数 n でも，n^2 を 3 で割った余りは 0 または 1 のみである」

こと，および，

「どんな正の整数 n でも，n^4 を 5 で割った余りは 0 または 1 のみである」

ことは，合同式による証明法も含めてシッカリ頭に入れておこう！

では次，合同式を応用すれば，はるか未来の曜日を決定することもできるんだね。面白そうでしょう。このように，合同式を使えば，様々な問題を解けるようになるんだね。早速，次の例題でチャレンジしてみよう。

(*ex*) 今日は日曜日である。これから，

(i) 10^5 日目が何曜日であるか，調べてみよう。

(ii) 2^{20} 日目が何曜日であるか，調べてみよう。

(iii) 5^{15} 日目が何曜日であるか，調べてみよう。

日曜日である今日から n 日目の曜日について，まず具体的に考えてみよう。

$n = 1$ 日目は月曜日，$n = 2$ 日目は火曜日，$n = 3$ 日目は水曜日，

$n = 4$ 日目は木曜日，$n = 5$ 日目は金曜日，$n = 6$ 日目は土曜日，

$n = 7$ 日目は日曜日となり，この後同様のことが繰り返されるんだね。

これを体系立てて列挙してみると，次のようになって，合同式が利用できることが見えてくるんだね。

$n=1,\ \ 8,\ \ 15,\ 22,\ 29,\ \cdots\cdots$　のとき，月曜日
$n=2,\ \ 9,\ \ 16,\ 23,\ 30,\ \cdots\cdots$　のとき，火曜日
$n=3,\ 10,\ 17,\ 24,\ 31,\ \cdots\cdots$　のとき，水曜日
$n=4,\ 11,\ 18,\ 25,\ 32,\ \cdots\cdots$　のとき，木曜日
$n=5,\ 12,\ 19,\ 26,\ 33,\ \cdots\cdots$　のとき，金曜日
$n=6,\ 13,\ 20,\ 27,\ 34,\ \cdots\cdots$　のとき，土曜日
$n=7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35,\ \cdots\cdots$　のとき，日曜日

これから，n を 7 で割ったときの余りで考えれば，

$n=1,\ \ 8,\ \ 15,\ 22,\ 29,\ \cdots\cdots$　のとき，$n\equiv 1 \pmod 7$
$n=2,\ \ 9,\ \ 16,\ 23,\ 30,\ \cdots\cdots$　のとき，$n\equiv 2 \pmod 7$
$n=3,\ 10,\ 17,\ 24,\ 31,\ \cdots\cdots$　のとき，$n\equiv 3 \pmod 7$

…………　となるので，これらをすべてまとめて示すと，

$n\equiv 1 \pmod 7$ のとき，月曜日
$n\equiv 2 \pmod 7$ のとき，火曜日
$n\equiv 3 \pmod 7$ のとき，水曜日
$n\equiv 4 \pmod 7$ のとき，木曜日
$n\equiv 5 \pmod 7$ のとき，金曜日
$n\equiv 6 \pmod 7$ のとき，土曜日
$n\equiv 0 \pmod 7$ のとき，日曜日　となるんだね。

(i) したがって，今日が日曜日のとき，そのはるか未来の $\underbrace{n=10^5\text{ 日目}}_{n=10\text{ 万日目}}$ の曜日も，上に示したように，合同式を用いれば，アッサリ求めることができるんだね。

$$n=\underbrace{10}_{3\,(\mathrm{mod}\ 7)}{}^{5}\equiv 3^{\overset{2\times2+1}{\boxed{5}}}\equiv(\underbrace{3^2}_{9\equiv 2\,(\mathrm{mod}\ 7)})^2\times 3\equiv\underbrace{2^2\times 3}_{12\equiv 5\,(\mathrm{mod}\ 7)}\equiv 5 \pmod 7$$

$n\equiv 5\,(\mathrm{mod}\ 7)$ のとき金曜日

これから，日曜日の 10^5 日目は金曜日であることが，分かったんだね。
どう？面白かったでしょう？

(ii) では次，日曜日の $n = 2^{20}$ 日目が何曜日になるかも，合同式を使って調べてみよう。

今回は，$2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$ を利用すればいいんだね。

$$n = \underbrace{2^{20}}_{2^{3\times6+2}} = (\underbrace{2^3}_{8\equiv1 \pmod{7}})^6 \times 2^2 \equiv 1^6 \times 2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$n \equiv 4 \pmod{7}$ のとき木曜日

これから，日曜日の 2^{20} 日目は，木曜日であることが分かったんだね。

(iii) 最後に，日曜日の $n = 5^{15}$ 日目が何曜日になるかについても，合同式を使って調べよう。

今回は，まず，$5^2 = 25 \equiv 4 \pmod{7}$ を利用しよう。

$$n = \underbrace{5^{15}}_{5^{2\times7+1}} = (\underbrace{5^2}_{25\equiv4 \pmod{7}})^7 \times 5 \equiv \underbrace{4^{\overset{2\times3+1}{\boxed{7}}} \times 5}_{(\underbrace{4^2}_{16\equiv2 \pmod{7}})^3\times4\times5} \equiv 2^3 \times 20 \quad \text{より，}$$

$$n \equiv \underbrace{2^3}_{8\equiv1 \pmod{7}} \times \underbrace{20}_{6 \pmod{7}} \equiv 1 \times 6 \equiv 6 \pmod{7}$$

$n \equiv 6 \pmod{7}$ のとき土曜日

よって，日曜日の 5^{15} 日目は，土曜日になるんだね。これも面白かった？

以上で，これまで 3 回に渡って講義してきた“**整数の性質**”の解説はすべて終了です！ みんな，よく頑張ったね。

これまでの講義の内容をシッカリマスターすれば，中間・期末試験も乗り切れるだろうし，さらに受験基礎力まで身に付けることが出来るんだよ。

だから，次回の講義まで，これまで学習した内容を自分で納得がいくまで，繰り返し復習しておいてほしい。次回からは，新しいテーマ“**図形の性質**”の講義に入ろう。それでは，みんな元気でな。また会おう…！