$c_n-5=(c_1-5)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$　と，アッという間に変形するんだね。

$\left[F(n)=\ F(1)\ \cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]$

後は，これに $c_1=1$ を代入して，一般項を求めると，

$$c_n=(1-5)\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+5$$

∴一般項 $c_n=-4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}+5\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　となる。

これから，求める数列 $\{c_n\}$ の極限は，

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-4\cdot\overbrace{\boxed{\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}}}^{0}+5\right\}$$

$$=-4\times0+5=5$$　となって，答えだ！　面白かった？

それでは，もう 1 題，同じ解法パターンの練習問題を解いてみよう。

練習問題 57	$a_{n+1}=pa_n+q$ の極限の応用	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されるとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2^{n+1}}$ を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ が，$b_1=6$，$b_{n+1}=4b_n-6\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されるとき，極限 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{2^{2n-1}}$ を求めよ。

(1)，(2) いずれも，$a_{n+1}=pa_n+q$ の形の漸化式なので，特性方程式 $x=px+q$ の解を使って，等比関数列型の漸化式 $F(n+1)=p\cdot F(n)$ の形にもち込もう。

(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_{n+1}=\underline{\underline{2}}a_n+1\ \cdots\cdots① \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

①の特性方程式は，

$x=2x+1$ なので，これを解いて，

$x=-1$ となる。これを用いて，

①を変形すると，

$a_{n+1}-(-1)=2\{a_n-(-1)\}$

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ となる。これから，

$[F(n+1)=2\cdot F(n)]$

アッ！という間

$a_n+1=(\overset{1}{a_1}+1)\cdot 2^{n-1}$ ここで，$a_1=1$ を代入すると，

$[F(n)=F(1)\cdot 2^{n-1}]$

$a_n+1=2^n$ より，一般項 a_n は，

$a_n=2^n-1$ ……② $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

今回求める極限は，②を用いて，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\overset{2^n-1\ (②より)}{a_n}}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\overset{\frac{1}{2}}{\boxed{\frac{2^n}{2^{n+1}}}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}}_{0}\right\}=\frac{1}{2}$$ となって，答えだ。

(2) $\begin{cases} b_1=6 \\ b_{n+1}=4b_n-6 \ \cdots\cdots ③ \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$

③の特性方程式は，

$x=4x-6$ なので，これを解いて，

$3x=6$ $\therefore x=2$ となる。これを用いて③を変形すると，

$b_{n+1}-2=4(b_n-2)$ となる。これから，

$[F(n+1)=4\cdot F(n)]$

アッ！という間

$b_n-2=(\overset{6}{b_1}-2)\cdot 4^{n-1}$ ここで，$b_1=6$ を代入すると，

$[F(n)=F(1)\cdot 4^{n-1}]$