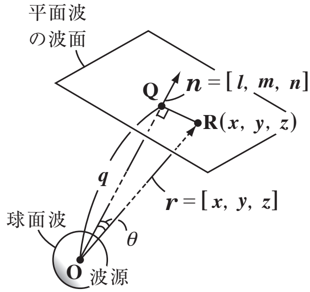
演習問題 90　● 球面波と平面波 ●

ある波源 $\mathbf{O}$ から発生した球面波も，$\mathbf{O}$ からの距離が十分大きくなると，曲率が小さくなって，ほぼ平面波になる。$\mathbf{O}$ からこの平面波の波面までの距離を $q(=\mathbf{OQ})$ とおき，$\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ と同じ向きの単位ベクトルを $\boldsymbol{n}=[l,\ m,\ n]$ とおく。また，この平面波上の任意の点を $\mathbf{R}(x,\ y,\ z)$ とおき，$\overrightarrow{\mathbf{OR}}=\boldsymbol{r}$ とおくと，$\boldsymbol{r}=[x,\ y,\ z]$ となる。



この平面波の変位 $u(x,\ y,\ z,\ t)$ は，3 次元の波動方程式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{v^2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ \cdots\cdots(*)$$ (v：波の伝播速度) をみたす

ものとする。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) q を $l,\ m,\ n,\ x,\ y,\ z$ で表せ。　(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を $\dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}$ で表せ。

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}=\dfrac{1}{v^2}\cdot\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ \cdots\cdots(**)$ が成り立つことを示せ。

ヒント！ (1) $q=\|\boldsymbol{r}\|\cos\theta=\|\boldsymbol{n}\|\ \|\boldsymbol{r}\|\cos\theta$ から導ける。(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial q}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial q}=l\dfrac{\partial u}{\partial q}$ となる。(3) (2) より，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=l^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial q^2}$ となり，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ も同様に変形すればいいんだね。

解答＆解説

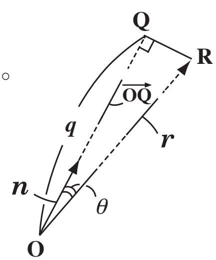
(1) △$\mathbf{OQR}$ は，$\angle\mathbf{OQR}=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であり，

$\angle\mathbf{QOR}=\theta$ とおくと，$q=\|\boldsymbol{r}\|\cos\theta\ \cdots\cdots①$ となる。

ここで，単位ベクトル $\boldsymbol{n}=[l,\ m,\ n]$ は，

$\boldsymbol{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathbf{OQ}}$ かつ $\|\boldsymbol{n}\|=\sqrt{l^2+m^2+n^2}=1$ より，

①の右辺に $\|\boldsymbol{n}\|(=1)$ をかけて変形すると，



$$q = \underbrace{\overbrace{\|\boldsymbol{n}\|}^{1} \cdot \|\boldsymbol{r}\|\cos\theta}_{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}\,(\text{内積})} = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r} = [l,\ m,\ n] \cdot [x,\ y,\ z]$$ より，

$q = lx + my + nz$ …② (l, m, n : 定数, x, y, z : 変数) となる。…(答)

(2) ②より，$\dfrac{\partial q}{\partial x} = l$ ……③　となる。よって，u を x で 1 階偏微分すると，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x}}_{l\,(③より)} \cdot \frac{\partial u}{\partial q} = l \cdot \frac{\partial u}{\partial q} \quad \cdots\cdots④$$　となる。

④をさらに，x で偏微分して，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigg(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{l\cdot\frac{\partial u}{\partial q}\,(④より)}\Bigg) = \frac{\partial}{\partial x}\left(l\frac{\partial u}{\partial q}\right) = l\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right) = l \cdot \underbrace{\frac{\partial q}{\partial x}}_{l\,(③より)} \cdot \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = l^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \quad \cdots\cdots⑤$$　となる。……………………………………………(答)

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ についても，同様の変形を行うと，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = m^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \quad \cdots\cdots\cdots⑥ \quad \left(\because\ \frac{\partial u}{\partial y} = m \cdot \frac{\partial u}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \quad \cdots\cdots\cdots⑦ \quad \left(\because\ \frac{\partial u}{\partial z} = n \cdot \frac{\partial u}{\partial q}\right)$$　となる。

⑤＋⑥＋⑦より，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = l^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + m^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} + n^2\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}$$

$$= \underbrace{(l^2 + m^2 + n^2)}_{\|\boldsymbol{n}\|^2 = 1}\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} \quad \cdots\cdots⑧$$　となる。

結局，q と t を独立変数とする 1 次元波動方程式が導かれるんだね。

⑧を (＊) の左辺に代入すると，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \cdots\cdots(＊＊)$$　が成り立つ。…………………………(終)