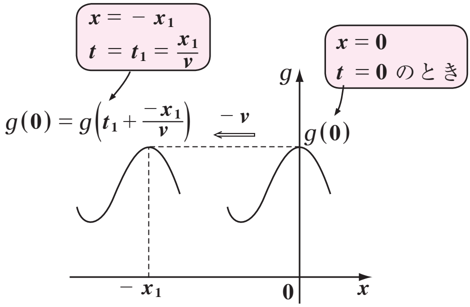
つまり，時刻 $t=0$ のとき $x=0$ 付近にあった波が速さ $-v(m/s)$ で後退して，$t=t_1$ 秒後に $x=-x_1$ 付近に現れることになる。よって，$g\left(t+\frac{x}{v}\right)$ を後退波と呼ぶんだ。これも大丈夫だね。

図 4　後退波 $g\left(t+\frac{x}{v}\right)$



ここで，進行波の例として，

$u(x,\ t)=u_0\sin\omega\left(t-\frac{x}{v}\right)$ ……① を考えてみよう。

(u_0：振幅，ω：角周波数 $(1/s)$，v：波の進行速度 (m/s))

これは，振幅 u_0，角周波数 ω の進行波で，これを変形すると，

$u(x,\ t)=u_0\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{v}x\right)$ ……①′ となる。

ここで，$\omega T=2\pi$ ……②，$\nu\lambda=v$ ……③の関係があるのはいいね。

(T：周期 (s)，$\nu\left(=\frac{1}{T}\right)$：周波数 $(1/s)$，λ：波長 (m))

③より，$\frac{1}{T}\lambda=v$　　これに $T=\frac{2\pi}{\omega}$ を代入して，

$\frac{\omega}{2\pi}\lambda=v$　　$\therefore\ \frac{\omega}{v}=\frac{2\pi}{\lambda}$ となる。

ここで，さらに，$\frac{2\pi}{\lambda}=k(1/m)$ とおく。この k は“**波数**”と呼ばれる。

よって，$\frac{\omega}{v}=k$ より，これを①′に代入して，

x 軸方向の 1 次元の進行波 $u(x,\ t)$ は，

$u(x,\ t)=u_0\sin(\omega t-kx)$ と表されることも覚えておこう。

● 球面波の波動方程式を導こう！

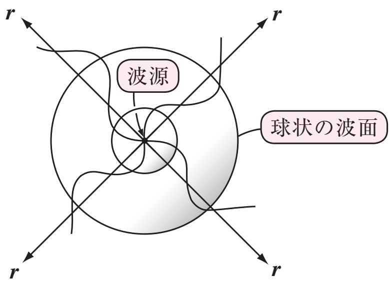
3 次元の波動方程式：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$ ……$(*)$ から球面波の波動方程式を導いてみよう。ある 1 つの波源から均質な媒質中をすべての

向きに伝わる球面波のイメージを図 **5** に示す。この球面波の変位 u は時刻 t と波源からの距離 r のみの関数，すなわち $u(r,\,t)$ である。まず，

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\quad\cdots\cdots①$$

から，r_x と u_x と u_{xx} を求めよう。

図 **5**　球面波のイメージ



$$\cdot\, r_x=\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{(x^2+\underbrace{y^2+z^2}_{\text{定数扱い}})^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$=\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cancel{2}x\qquad\therefore\ r_x=\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\quad\cdots\cdots②$$ となる。②より，

$$\cdot\, u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{r_x}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{x}{r}\cdot u_r\qquad\therefore\ u_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{r}u_r\quad\cdots\cdots③$$ となる。

$$\cdot\, u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(\underbrace{u_x}_{\frac{x}{r}u_r\ (③より)})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}u_r\right)$$

公式：
$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

$$=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)\right\}u_r+\frac{x}{r}\left(\frac{\partial}{\partial x}u_r\right)$$

$$\frac{1\cdot r-x\cdot r_x}{r^2}=\frac{r-x\cdot\frac{x}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}=\frac{y^2+z^2}{r^3}$$

（r^2：$x^2+y^2+z^2$）

$$\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(u_r)=\frac{x}{r}u_{rr}\quad(②より)$$

公式：
$\left(\frac{g}{f}\right)'=\frac{g'\cdot f-g\cdot f'}{f^2}$

$$\therefore\ u_{xx}=\frac{y^2+z^2}{r^3}\cdot u_r+\frac{x^2}{r^2}u_{rr}\quad\cdots\cdots④$$ が導けるんだね。

同様の計算を行って，u_{yy}，u_{zz} も求めると，

$$u_{yy}=\frac{z^2+x^2}{r^3}u_r+\frac{y^2}{r^2}u_{rr}\quad\cdots\cdots⑤\qquad u_{zz}=\frac{x^2+y^2}{r^3}u_r+\frac{z^2}{r^2}u_{rr}\quad\cdots\cdots⑥$$ となる。

ここで，④＋⑤＋⑥ を求めると，

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\frac{y^2+z^2}{r^3}u_r+\frac{x^2}{r^2}u_{rr}+\frac{z^2+x^2}{r^3}u_r+\frac{y^2}{r^2}u_{rr}+\frac{x^2+y^2}{r^3}u_r+\frac{z^2}{r^2}u_{rr}$$

$$=\frac{2(\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{r^2})}{r^3}u_r+\frac{\overbrace{x^2+y^2+z^2}^{r^2}}{r^2}u_{rr}$$

$$\therefore\ u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=\frac{2}{r}u_r+u_{rr}\ \cdots\cdots⑦$$ となる。

この⑦を，3 次元波動方程式：$u_{tt}=v^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz})\ \cdots\cdots(*)$ に代入すると，

$$u_{tt}=v^2\left(\frac{2}{r}u_r+u_{rr}\right)\ \cdots\cdots⑧$$ となる。

ここで，$\frac{2}{r}u_r+u_{rr}=\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}\ \cdots\cdots⑨$ と表すことができる。

$\because$ (⑨の右辺) $=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(1\cdot u+ru_r)=\frac{1}{r}(u_r+1\cdot u_r+ru_{rr})$
$=\frac{1}{r}(2u_r+ru_{rr})=\frac{2}{r}u_r+u_{rr}=$ (⑨の左辺) となるからだね。

⑨を⑧に代入して，

$$u_{tt}=\frac{v^2}{r}\cdot\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}\qquad r\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2}=v^2\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2}\ \cdots\cdots⑩$$

1 次元波動方程式：$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=v^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ と同じ形

r と t は独立変数より，t で偏微分する場合，r は定数扱いなので，
$r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2}$ と変形できる。

⑩は，$r\cdot u(r,t)$ を新たな波動関数と考えると，これは 1 次元の波動方程式と同じ形をしている。よって，この一般解はダランベールの解の内，波源からの進行波のみで，後退波は存在しないはずなので，$r\cdot u(r,t)=f\left(t-\frac{r}{v}\right)$ と表せることも分かるんだね。これも面白かったでしょう？