(ex3) 確率分布 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ が，次式をみたすものとする。

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots①$$

(ただし，$a_n+b_n+c_n+d_n=1 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とする。)

このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ …② が存在するものとして，$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ を求めよう。

②が成り立つとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}$ ……②´ も成り立つ。

よって，$n\to\infty$ のとき，①は，

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}}_{\text{推移確率行列 } M}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots①´$$

となる。

①´を変形して，

$$\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}}_{M}-\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{単位行列 } E}\right\}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

より，

$$\begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.4 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & -0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots③$$ となる。これを変形して，

行列 $(M-E)$ の行基本変形

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdots\cdots④$$ となる。④から，

$$\begin{cases} \alpha + 2\gamma - 2\delta = 0 & \cdots\cdots⑤ \\ 2\beta - \delta = 0 & \cdots\cdots⑥ \\ 2\gamma - \delta = 0 & \cdots\cdots⑦ \end{cases}$$ となる。

$\delta = 2k$ （k：正の定数）とおくと，
⑦より，$2\gamma - 2k = 0$ $\therefore \gamma = k$
⑥より，$2\beta - 2k = 0$ $\therefore \beta = k$
⑤より，$\alpha + 2k - 4k = 0$ $\therefore \alpha = 2k$

4 つの未知数 α, β, γ, δ に対して，方程式は⑤，⑥，⑦の 3 つだけなので，この時点で解は決まらない。よって，$\delta = 2k$ (k：定数) とおいて，α, β, γ を k で表し，最後に⑧の方程式 (4 つ目の方程式) で，この k の値を決定する。

ここで，$\delta = 2k$ （k：正の定数）とおくと，

⑤，⑥，⑦より，$\alpha = 2k$，$\beta = k$，$\gamma = k$ となる。

ここで，$\underbrace{\alpha}_{2k} + \underbrace{\beta}_{k} + \underbrace{\gamma}_{k} + \underbrace{\delta}_{2k} = 1$ (全確率) ……⑧ より，

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \alpha + \beta + \gamma + \delta = 1$

$2k + k + k + 2k = 1$ $\therefore k = \dfrac{1}{6}$ 以上より，求める極限は，

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \\ d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k \\ k \\ k \\ 2k \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$ となる。$\left(\because k = \dfrac{1}{6}\right)$