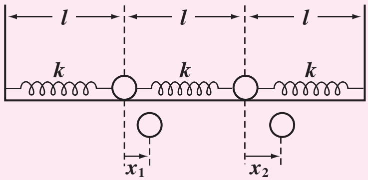
## 演習問題 11 の別解

2 質点系のバネの連成振動では，2 つの基準振動の和 ( 重ね合わせ ) で表される。よって，この基準振動を $\begin{cases} x_1 = B_1\cos(\omega t+\phi) \\ x_2 = B_2\cos(\omega t+\phi) \end{cases}$ ……①

$\left(\text{ただし，}\omega,\ B_1,\ B_2\text{：未知数，}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\text{であり，}B_1 : B_2\text{ の比を求める。}\right)$




演習問題 11 の連成バネ振り子の微分方程式は，次の通りだね。

$\ddot{x}_1 = -\omega_0{}^2(2x_1 - x_2)$ ………②

$\ddot{x}_2 = -\omega_0{}^2(-x_1 + 2x_2)$ ……③

$\left(\text{ただし，}\omega_0{}^2 = \dfrac{k}{m}\right)$ ここで，①を $t$ で 2 階微分すると，

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx_1}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\{-B_1\omega\sin(\omega t+\phi)\} = -B_1\omega^2\cos(\omega t+\phi) \\ \ddot{x}_2 = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx_2}{dt}\right) = \dfrac{d}{dt}\{-B_2\omega\sin(\omega t+\phi)\} = -B_2\omega^2\cos(\omega t+\phi) \end{cases}$$

…①´ となる。

①と①´を②，③に代入して，

$$\begin{cases} -B_1\omega^2\cancel{\cos(\omega t+\phi)} = -\omega_0{}^2(2B_1 - B_2)\cancel{\cos(\omega t+\phi)} \\ -B_2\omega^2\cancel{\cos(\omega t+\phi)} = -\omega_0{}^2(-B_1 + 2B_2)\cancel{\cos(\omega t+\phi)} \end{cases}$$

この 2 式の両辺を $\cos(\omega t+\phi)$ で割って，$B_1$ と $B_2$ でまとめると，

$$\begin{cases} (\omega^2 - 2\omega_0{}^2)B_1 + \omega_0{}^2B_2 = 0 \\ \omega_0{}^2B_1 + (\omega^2 - 2\omega_0{}^2)B_2 = 0 \end{cases}$$

この左辺を行列とベクトルの積で表すと，

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \omega^2 - 2\omega_0{}^2 & \omega_0{}^2 \\ \omega_0{}^2 & \omega^2 - 2\omega_0{}^2 \end{bmatrix}}_{\text{行列 } A \text{ とおく}} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots④$$

$A = \begin{bmatrix} \omega^2 - 2\omega_0{}^2 & \omega_0{}^2 \\ \omega_0{}^2 & \omega^2 - 2\omega_0{}^2 \end{bmatrix}$ とおくと，④は $A\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ …④´ となる。

ここで，$A$ の逆行列 $A^{-1}$ が存在すると仮定すると，この $A^{-1}$ を④´の両辺に左からかけて，$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となって，$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ の条件に反する。

$B_1 = 0$ かつ $B_2 = 0$ ならば，①より，$x_1 = 0$，$x_2 = 0$ となって，振動は起こらない！

よって，$A^{-1}$ は存在しないので，

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0$$

一般に，$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の逆行列 $A^{-1}$ が存在しないとき $detA = ad - bc = 0$ となる。

よって，$(\omega^2 - 2\omega_0^2)^2 - (\omega_0^2)^2 = 0$ より，

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$(\omega^2 - 2\omega_0^2 + \omega_0^2)(\omega^2 - 2\omega_0^2 - \omega_0^2) = 0$

$(\omega^2 - \omega_0^2)(\omega^2 - 3\omega_0^2) = 0$ より，$\omega^2 = \omega_0^2$ または $3\omega_0^2$ となる。

ここで，$\omega > 0$，$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$ より，

$\omega = \omega_0$ または $\sqrt{3}\omega_0$ となる。

これで，$\omega$ の値が決まったので，後は，$B_1$ と $B_2$ の比が分かればいいんだね。

(i) $\omega = \omega_0$ のとき④は，

$\begin{bmatrix} \omega^2 - 2\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega^2 - 2\omega_0^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ……④

$$\begin{bmatrix} -\omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -\omega_0^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ となる。

よって，$-\cancel{\omega_0^2}B_1 + \cancel{\omega_0^2}B_2 = 0$，両辺を $\omega_0^2 (\neq 0)$ で割って，

$B_1 = B_2$ より，$B_1 : B_2 = 1 : 1$ が分かったので，

$B_1 = B_2 = C_1$ (定数) とおくと，このときの基準モードは，

$$\begin{cases} x_1 = C_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) \\ x_2 = C_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) \end{cases} \quad \cdots\cdots⑤$$ となる。

(ii) $\omega = \sqrt{3}\omega_0$ のとき④は，

$$\begin{bmatrix} \omega_0^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & \omega_0^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ となる。よって，$\cancel{\omega_0^2}B_1 + \cancel{\omega_0^2}B_2 = 0$

両辺を $\omega_0^2 (\neq 0)$ で割って，$B_1 = -B_2$ より，$B_1 : B_2 = 1 : -1$ となる。

よって，$B_1 = C_2$，$B_2 = -C_2$ とおくと，このときの基準モードは，

$$\begin{cases} x_1 = C_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \\ x_2 = -C_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \end{cases} \quad \cdots\cdots⑥$$ となる。

以上より，⑤，⑥それぞれの $x_1$ と $x_2$ の和を求めれば，この連成振動の解は，

$$\begin{cases} x_1 = C_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) + C_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \\ x_2 = C_1\cos(\omega_0 t + \phi_1) - C_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \phi_2) \end{cases}$$ となって，P191 の解答と一致するんだね。この基準振動による解法も，力学ではよく利用されるので，シッカリマスターしよう！