では，もう 1 題，同じタイプの応用問題を解いてみよう。

練習問題 67	定積分で表された関数 (II)	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

関数 $f(x)$ が，$f(x)=|2x-1|\cdot\left\{\int_0^2 f(t)dt+1\right\}$ ……①

をみたすとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

前問と同様に $\int_0^2 f(t)dt=A$ (定数) とおくと，①は $f(x)=(A+1)|2x-1|$ と簡単になることが分かるはずだ。しかし，今回の関数 $f(x)$ は絶対値の付いた関数なので，この積分をキチンと行うことがポイントになるんだね。

$f(x)=|2x-1|\cdot\left\{\underbrace{\int_0^2 f(t)dt}_{A(\text{定数})}+1\right\}$ ……① について，

$\int_0^2 f(t)dt=A$ (定数) ……② とおくと，①は，

$f(x)=|2x-1|\cdot(A+1)$

$\quad\;\;=(A+1)|2x-1|$ ……①′ となる。

よって，$f(x)$ は，文字定数 A を含む，絶対値の付いた 1 次関数であることが分かったんだね。

絶対値の計算

$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

①′ の変数 x を変数 t に変えて，

$f(t)=(A+1)|2t-1|$ ……①″ となる。

この①″ を②に代入すると，

$A=\int_0^2 (A+1)|2t-1|dt$

$\therefore A=(A+1)\underbrace{\int_0^2 |2t-1|dt}_{\text{この定積分を④とおいて，これを計算する。}}$ ……③ となる。

よって，定積分 $\int_0^2 |2t-1|dt$ ……④ とおいて，これを求める。

積分区間 $0 \leqq t \leqq 2$ において，$|2t-1|$ は，

$$|2t-1| = \begin{cases} -(2t-1) & \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ 2t-1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \leqq 2\right) \end{cases}$$

となるので，④の定積分は，

$$\int_0^2 |2t-1|\,dt$$

$$= -\int_0^{\frac{1}{2}} (2t-1)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2t-1)\,dt$$

$$= -\left[t^2-t\right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[t^2-t\right]_{\frac{1}{2}}^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} - (0^2-0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$2^2 - 2 - \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right\} = 4 - 2 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 2 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{4}$$

$$= -\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{5}{2} \cdots ④$$

となる。よって，④を③に代入して，

A の値を求めると，

$$A = (A+1)\cdot\frac{5}{2} \qquad 2A = 5A + 5$$

$$3A = -5 \qquad \therefore A = -\frac{5}{3} \quad \cdots\cdots ⑤ \text{ となる。}$$

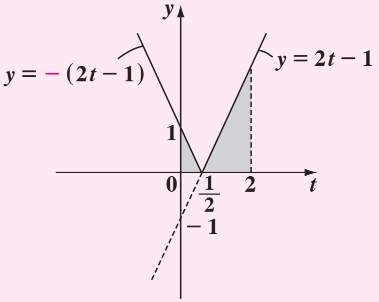
⑤を①´に代入すると，求める関数 $f(x)$ は，

$$f(x) = \left(-\frac{5}{3} + 1\right)|2x-1|$$

$\therefore f(x) = -\dfrac{2}{3}|2x-1|$ となって，答えだ！面白かった？

$y = |2t-1|$ とおくと，

$$y = |2t-1| = \begin{cases} 2t-1 & \left(\dfrac{1}{2} \leqq t \text{ のとき}\right) \\ -(2t-1) & \left(t \leqq \dfrac{1}{2} \text{ のとき}\right) \end{cases}$$



$y = |2t-1|$ のグラフは，上に示すように，まず，$y = 2t-1$ のグラフを描く。次に $t \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，$y \leqq 0$ となるので，この部分を t 軸に関して上に折り返して，0 以上とする。つまり，これは V 字型のグラフになるんだね。