★★★元気に伸びる数学Ⅱ・B問題集★★★

補充問題（additional question）

補充問題 1	難易度 ★★	定積分で表された関数と面積計算

関数 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)\,dt$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ を，(i) $-1\leqq x<0$ と (ii) $0\leqq x\leqq 1$ の場合について，x の式で表せ。また，関数 $y=f(x)$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ のグラフを描け。

(2) 関数 $y=f(x)$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ と x 軸とで挟まれる図形の面積 S を求めよ。　（神戸商船大＊）

ヒント！ (1) t の関数 $(1-|t|)$ を t で積分した後，t に x と -1 を代入して引き算したものが $f(x)$ だから，$f(x)$ は当然 x の式で表されるんだね。(2) 面積 S は，$y=f(x)$ を (i) $-1\leqq x<0$ と (ii) $0\leqq x\leqq 1$ に場合分けして求めよう。

解答＆解説

(1) $u=1-|t|$ とおくと，

$$u=\begin{cases}1-(-t)=1+t & (t<0\text{ のとき})\\ 1-t & (t\geqq 0\text{ のとき})\end{cases}$$ となる。

よって，$f(x)$ を，(i) $-1\leqq x<0$ と (ii) $0\leqq x\leqq 1$ に場合分けして求めると，次のようになる。

(i) $-1\leqq x<0$ のとき，右図より，

$$f(x)=\int_{-1}^{x}(1+t)\,dt=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{x}$$

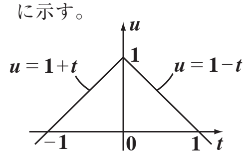
$$=x+\frac{1}{2}x^2-\left(-1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}(x^2+2x+1)$$

$$=\frac{1}{2}(x+1)^2 \cdots\cdots ①$$ となる。………(答)

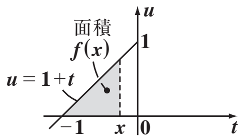
ココがポイント

⇦ $|t|=\begin{cases}-t & (t<0\text{ のとき})\\ t & (t\geqq 0\text{ のとき})\end{cases}$ より

$u=1-|t|$ のグラフを下に示す。



⇦ (i) $-1\leqq x<0$ のとき



(ⅱ) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，右図より，

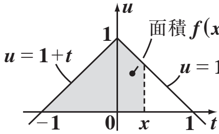
$$f(x)=\int_{-1}^{0}(1+t)\,dt+\int_{0}^{x}(1-t)\,dt$$

$$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_{-1}^{0}+\left[t-\frac{1}{2}t^2\right]_{0}^{x}$$

$$=-\frac{1}{2}(x^2-2x-1)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$$

……② となる。……(答)

⇦(ⅱ) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき



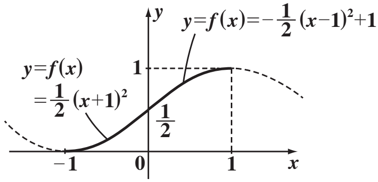
⇦$f(x)=0-\left(-1+\frac{1}{2}\right)+x-\frac{1}{2}x^2-0$

$=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{1}{2}$

$=-\frac{1}{2}(x^2-2x+1)+1$

$=-\frac{1}{2}(x-1)^2+1$

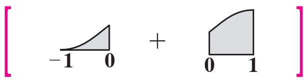
以上 (ⅰ)(ⅱ) の①，②より，関数 $y=f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ のグラフの概形は右図のようになる。……………………………………………(答)



(2) 次に，関数 $y=f(x)$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸とで挟まれる図形の面積 S を求めると，

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x^2+2x+1) & (-1 \leqq x < 0)\\ -\frac{1}{2}(x^2-2x-1) & (0 \leqq x \leqq 1)\end{cases} \text{ より，}$$

$$S=\int_{-1}^{0}f(x)\,dx+\int_{0}^{1}f(x)\,dx$$



$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(x^2+2x+1)\,dx-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(x^2-2x-1)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3+x^2+x\right]_{-1}^{0}-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3-x^2-x\right]_{0}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{0-\left(-\frac{1}{3}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)\right\}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-1-1-0\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\times\left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=1$$ である。…………………(答)