

微分方程式

絶対暗記問題 70

難易度 ★★

CHECK1

CHECK2

CHECK3

次の微分方程式を各条件の下で解け。

(1) $y' = 2y$ ……………① ($y \neq 0$, 条件: $x = 0$ のとき $y = 3$)

(2) $y' = 2x(y - 1)$ ……② ($y \neq 1$, 条件: $x = 0$ のとき $y = 5$)

ヒント!

(1), (2) いずれも変数分離形 $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ の形で解ける微分方程式の問題なんだね。微分方程式を解く際に、定数 C の扱い方に注意しよう。今回は、(1), (2) ともに条件が与えられているので、この定数 C の値を決定できる。受験問題でも、ときどき出題されるので、この微分方程式の解法パターンをシッカリマスターしよう!

解答&解説

(1) ①より, $\frac{dy}{dx} = 2y$ $y \neq 0$ より, 両辺を y で割り, 両辺に dx をかけると

$$\frac{1}{y} dy = 2 \cdot dx \quad \text{より,}$$

(yの式)

今回は定数だけど, これも (xの式) と考えよう。

変数分離形: $f(y)dy = g(x)dx$ の形になったので, この後は両辺に \int (インテグラル) を付けて, 不定積分にもち込めばいいんだね。

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 2 \cdot dx$$

$\log|y| = 2x + C_1$ (C_1 : 定数) となる。

$\log|y| + C_1' = 2x + C_2'$ より, まとめて $\log|y| = 2x + C_1$ ($C_1 = C_2' - C_1'$) とした。

よって, $|y| = e^{2x+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{2x}$

$y = \pm e^{C_1} e^{2x} \quad \therefore y = C e^{2x} \dots\dots ③$ となる。 ($C = \pm e^{C_1}$)

これを新たに定数 C とおく。

ここで, 条件: $x = 0$ のとき $y = 3$ より, これらを③に代入して,

$3 = C \cdot e^{2 \cdot 0} = C \quad \therefore C = 3$ となる。 ← 条件から, C の値が求められた。

$e^0 = 1$

これを③に代入すると, ①の解は,

$y = 3e^{2x}$ である。……………(答)

(2) ②より, $\frac{dy}{dx} = 2x(y-1) \dots\dots ②'$ $y \neq 1$ より, $y-1 \neq 0$

よって, ②' の両辺を $y-1$ で割り, 両辺に dx をかけると,

$$\frac{1}{y-1} dy = 2x dx \quad \text{となる。} \leftarrow \text{変数分離形: } f(y)dy = g(x)dx \text{ になった!}$$

この両辺を積分して,

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \int 2x dx \quad \log|y-1| = x^2 + C_1 \quad \text{より,}$$

$$|y-1| = e^{x^2+C_1} = e^{C_1} \cdot e^{x^2} \quad \text{これから,}$$

$$y-1 = \pm e^{C_1} \cdot e^{x^2}$$

これを新たに定数 C とおく。

$$\therefore y = Ce^{x^2} + 1 \dots\dots ④ \quad \text{となる。} \quad (C = \pm e^{C_1})$$

ここで, 条件: $x=0$ のとき $y=5$ より, これらを④に代入して,

$$5 = C \cdot e^{0^2} + 1 = C + 1 \quad \therefore C = 4$$

$$e^0 = 1$$

これを④に代入すると, 微分方程式②の解は,

$$y = 4e^{x^2} + 1 \quad \text{である。} \dots\dots\dots \text{(答)}$$

頻出問題にトライ・21

難易度 ★★

CHECK1

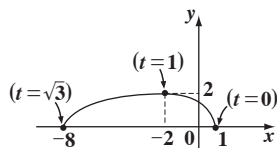
CHECK2

CHECK3

媒介変数 t を用いて $x = 1 - 3t^2$, $y = 3t - t^3$

($0 \leq t \leq \sqrt{3}$) で表された右図の曲線と x 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。

(横浜市立大*)



解答は P220