演習問題 27　● エルミート行列の対角化(Ⅱ) ●

エルミート行列 $A_H=\begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 U_U を用いて，

$U_U^{-1}A_HU_U$ として対角化せよ。

ヒント！ まず，固有方程式 $|A_H-\lambda E|=0$ を解いて，固有値 λ_1 と λ_2，およびこれらに対応する，固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ を求めよう。これから，ユニタリ行列 $U_U=[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]$ を作って，エルミート行列 A_H を対角化すればいいんだんね。この流れをマスターしよう。

解答＆解説

$T=A_H-\lambda E$ とおいて，$T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ……① とする。

$T=A_H-\lambda E=\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{bmatrix}$ より，固有方程式：

$$|T|=\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2+2i \\ 2-2i & 1-\lambda \end{vmatrix}=\underbrace{(3-\lambda)(1-\lambda)}_{(\lambda-3)(\lambda-1)=\lambda^2-4\lambda+3}-\underbrace{(2+2i)(2-2i)}_{2^2-2^2\cdot i^2=4+4=8}=0 \quad \text{より，}$$

$\lambda^2-4\lambda-5=0 \qquad (\lambda+1)(\lambda-5)=0$

$\therefore\ \lambda=-1,\ 5$ となる。(ここで，$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=5$ とおく。)

(i) $\lambda_1=-1$ のとき，①を $T\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$，そして，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 4 & 2+2i \\ 2-2i & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ 2 & 1+i \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\}r=1$$

よって，$(1-i)\alpha_1+\alpha_2=0$ より，

$\alpha_1=k_1$ とおくと，

$\alpha_2=-(1-i)k_1$ となる。

よって，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$

ここで，$k_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は正規化される。これを $\boldsymbol{u}_1$ とおくと，

ここで，$\boldsymbol{x}_1'=\begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|\boldsymbol{x}_1'\|^2=\boldsymbol{x}_1'\cdot\boldsymbol{x}_1'={}^t\boldsymbol{x}_1'\cdot\overline{\boldsymbol{x}_1'}$
$=1^2+(-1+i)(-1-i)$
$=1+1-i^2=3$

$\therefore\ \|\boldsymbol{x}_1'\|=\sqrt{3}$ より，$k_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は正規化されて $\boldsymbol{u}_1$ となる。

$\therefore \boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}$ ……② となる。

(ii) $\lambda_2 = 5$ のとき，①を $T\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$，そして，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -2 & 2+2i \\ 2-2i & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ 1-i & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -(1+i) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Big\} r=1$

よって，$\beta_1 - (1+i)\beta_2 = 0$ より，

$\beta_2 = k_2$ とおくと，

$\beta_1 = (1+i)k_2$ となる。

よって，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$

ここで，$k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2$ は

正規化される。これを，$\boldsymbol{u}_2$ とおくと，

> ここで，$\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，
>
> $\|\boldsymbol{x}_2'\|^2 = {}^t\boldsymbol{x}_2' \overline{\boldsymbol{x}_2'}$
>
> $= (1+i)(1-i) + 1^2$
>
> $= 1^2 - i^2 + 1^2 = 3$
>
> $\therefore \|\boldsymbol{x}_2'\| = \sqrt{3}$ より，$k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと，
>
> $\boldsymbol{x}_2$ は正規化されて，$\boldsymbol{u}_2$ となる。

$\therefore \boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1+i \\ 1 \end{bmatrix}$ ……③ となる。

以上 (i)(ii) の②，③より，ユニタリ行列 U_U を

$U_U = [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2] = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1+i & 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

エルミート行列 $A_H = \begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix}$ は，$U_U^{-1} A_H U_U$ により，

$U_U^{-1} A_H U_U = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ と対角化できる。……………………………(答)

参考

$U_U^{-1} = {}^t\overline{U_U} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix}$ より，

$U_U^{-1} A_H U_U = \dfrac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -1-i \\ 1-i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ -1+i & 1 \end{bmatrix}$ を，

実際に計算して，$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ となることを，各自確認しておこう！