$A \cdot B = n$ 型の整数の方程式(Ⅱ)

絶対暗記問題 58　難易度 ★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

$m,\ n$ を自然数とし，$1 < n < m$ とする。また，α と β を，

$\alpha = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ ……①，$\beta = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ……② とおく。

(1) $m = 3$，$n = 6$ のとき，$\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$ と $\beta + \dfrac{1}{\beta}$ と $S = \alpha\beta + \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} + \dfrac{1}{\alpha\beta}$ の値を求めよ。

(2) 等式 $\alpha^2\beta^2 + \dfrac{\alpha^2}{\beta^2} + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\alpha^2\beta^2} = 300$ ……③ が成り立つような，整数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。　(センター試験 ＊)

ヒント！ (1) $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\sqrt{m}$，$\beta + \dfrac{1}{\beta} = 2\sqrt{n}$ となることから，S の値も簡単に求まる。(2) ③を，$\left(\alpha^2 + \dfrac{1}{\alpha^2}\right)\left(\beta^2 + \dfrac{1}{\beta^2}\right) = 300$ と変形して，$A \cdot B = n$ 型の整数問題にもち込もう。

解答＆解説

(1)・$\alpha = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ ……① より，

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} = \sqrt{m} - \sqrt{m-1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{m} - \sqrt{m-1}}}_{} = \sqrt{m} - \cancel{\sqrt{m-1}} + \underline{\sqrt{m} + \cancel{\sqrt{m-1}}} = 2\sqrt{m} \cdots ④$$

$$\frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}{(\sqrt{m} - \sqrt{m-1})(\sqrt{m} + \sqrt{m-1})} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}{\cancel{m} - (\cancel{m} - 1)} = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{m-1}}{1} = \sqrt{m} + \sqrt{m-1}$$

分子・分母に $\sqrt{m} + \sqrt{m-1}$ をかけた。

・$\beta = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ ……② より，同様に，

$$\beta + \frac{1}{\beta} = \sqrt{n} - \sqrt{n-1} + \frac{1}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \sqrt{n} - \cancel{\sqrt{n-1}} + \underline{\sqrt{n} + \cancel{\sqrt{n+1}}} = 2\sqrt{n} \quad \cdots\cdots ⑤$$

以上，④，⑤に $m = 3$，$n = 6$ を代入して，

$\alpha + \dfrac{1}{\alpha} = 2\sqrt{3}$ ……④´，$\beta + \dfrac{1}{\beta} = 2\sqrt{6}$ ……⑤´ となる。……………(答)

次に，

$$S = \alpha\beta + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = \alpha\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\alpha}\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right) = \underbrace{\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}_{2\sqrt{3}\,(④´\text{より})}\underbrace{\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)}_{2\sqrt{6}\,(⑤´\text{より})} \cdots ⑥$$

⑥に④´と⑤´を代入して，求める S の値は，

$$S=\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)=2\sqrt{3}\cdot2\sqrt{6}=4\cdot3\cdot\sqrt{2}=12\sqrt{2}$$ である。……(答)

(2) ③の左辺を変形すると，次の③´が導ける。

$$\alpha^2\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{1}{\alpha^2}\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)=300,\quad \left(\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{\beta^2}\right)=300 \quad \cdots ③´$$

ここで，④と⑤の両辺を 2 乗して，

・$\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2=(2\sqrt{m})^2$ より，$\alpha^2+2\cancel{\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cancel{\alpha}}+\dfrac{1}{\alpha^2}=4m$

$\therefore\ \alpha^2+\dfrac{1}{\alpha^2}=4m-2$ ……⑦　となる。

・$\left(\beta+\dfrac{1}{\beta}\right)^2=(2\sqrt{n})^2$ より，同様に，$\beta^2+\dfrac{1}{\beta^2}=4n-2$ ……⑧ となる。

⑦，⑧を③´に代入して，

$(4m-2)(4n-2)=300$　　$4(2m-1)(2n-1)=300$ ← 両辺を 4 で割る。

$(2m-1)(2n-1)=\underset{\substack{\parallel \\ 3\times5^2}}{75}$ ……⑨　となる。← $A\cdot B=n$ 型にもち込んだ

ここで，$m,\ n$ は自然数で，$1<m<n$ より，$1<2m-1<2n-1$…⑩ となる。

$2<2m<2n$　　$2-1<2m-1<2n-1$

⑨と⑩をみたす自然数 $(2m-1,\ 2n-1)$ の組は，右の表より次の 2 組のみである。

$2m-1$ と $2n-1$ の表

$2m-1$	~~1~~	3	5	~~15~~	~~25~~	~~75~~
$2n-1$	~~75~~	25	15	~~5~~	~~3~~	~~1~~

$2m-1>1$ に矛盾　　$2m-1<2n-1$ に矛盾

$(2m-1,\ 2n-1)=(3,\ 25),\ (5,\ 15)$

よって，求める自然数の組 $(m,\ n)$ は，

$(m,\ n)=(2,\ 13),\ (3,\ 8)$ である。……(答)

$2m-1=3,\ 2n-1=25$　　$2m-1=5,\ 2n-1=15$ より

頻出問題にトライ・21	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

x の 2 次方程式 $x^2+(m-2)x+m+1=0$　…①　が相異なる 2 つの整数の解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつとき，①は $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ と表せることを利用して，m の値を求めよ。

解答は P256