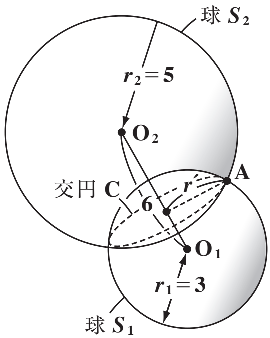
元気力アップ問題 115　難易度 ★★　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

中心 O_1，半径 $r_1 = 3$ の球 S_1 と
中心 O_2，半径 $r_2 = 5$ の球 S_2 がある。
右図に示すように 2 つの球の
中心間の距離 $O_1O_2 = 6$ である。
このとき，次の各問いに答えよ。



(1) 2 つの球 S_1 と S_2 の交わりの円 C の半径 r' を求めよ。

(2) 交わりの円 C を底面とし，中心 O_1 を頂点とする直円錐の体積 V_1 を求めよ。

(3) 交わりの円 C を底面とし，中心 O_2 を頂点とする直円錐の体積 V_2 を求めよ。

ヒント！ 2 つの球 S_1 と S_2 の中心 O_1 と O_2，および交円 C の周上の 1 点 A を通る平面で切った断面図で考えよう。ここで，交円 C の中心を O' とおくと，2 つの直角三角形 $\triangle O_1O'A$ と $\triangle O_2O'A$ ができるので，これらに三平方の定理を使って解いていけばいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

(1) 2 つの球 S_1 と S_2 の交わりの円 C の中心を O'，半径を r' とおく。また，交円 C の周上の 1 点を A とおき，これら 2 球を 3 点 O_1，O_2，A を通る平面で切ったときの断面の主な部分の様子を右図に示す。

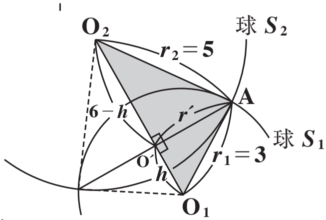
ここで，$O_1O_2 = 6$ より，$O'O_1 = h$ とおくと $O'O_2 = 6 - h$ となる。このとき，2 つの直角三角形 $\triangle O_1O'A$ と $\triangle O_2O'A$ が得られるので，これらに三平方の定理を用いると，

$$\begin{cases} 9 = r'^2 + h^2 & \cdots\cdots\cdots\cdots ① \quad [r_1{}^2 = r'^2 + h^2] \\ 25 = r'^2 + (6-h)^2 & \cdots\cdots ② \quad [r_2{}^2 = r'^2 + (6-h)^2] \end{cases}$$

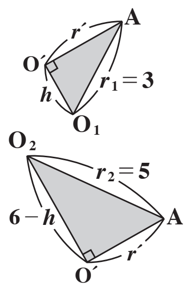
となる。よって，② − ① より，

$$16 = \underbrace{(6-h)^2 - h^2}_{36-12h+\cancel{h^2}-\cancel{h^2}=36-12h} \qquad 16 = 36 - 12h$$

ココがポイント



2 つの直角三角形



$12h=20$ より，

$\therefore\ h=\dfrac{20}{12}=\dfrac{5}{3}$ ……③ となる。

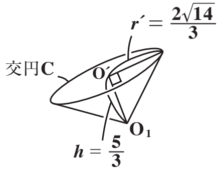
③を①に代入して，$9=r'^2+\left(\dfrac{5}{3}\right)^2$

$r'^2=9-\dfrac{25}{9}=\dfrac{56}{9}$

$\therefore$ 交円 C の半径 $r'=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ …④ である。……(答)

⇦ $r'^2=9-\dfrac{25}{9}=\dfrac{81-25}{9}$
$=\dfrac{56}{9}=\dfrac{2^2\times14}{3^2}$
$\therefore\ r'=\sqrt{\dfrac{2^2\times14}{3^2}}=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$

(2) 半径 $r'=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ の交円 C を底面とし，中心 O_1 を頂点とする直円錐の体積 V_1 を求めると，

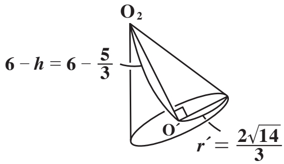


$V_1=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{\pi r'^2}_{\text{底面積}}\times\underbrace{h}_{\text{高さ}}$ ←これに，③，④を代入して

$=\dfrac{1}{3}\times\pi\left(\dfrac{2\sqrt{14}}{3}\right)^2\times\dfrac{5}{3}=\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{56}{9}\times\dfrac{5}{3}$ より，

$\therefore\ V_1=\dfrac{280}{81}\pi$ である。……………………………(答)

(3) 半径 $r'=\dfrac{2\sqrt{14}}{3}$ の交円 C を底面とし，中心 O_2 を頂点とする直円錐の体積 V_2 を求めると，



$V_2=\dfrac{1}{3}\times\underbrace{\pi r'^2}_{\text{底面積}}\times\underbrace{(6-h)}_{\text{高さ}}$ ←これに，③，④を代入して

$=\dfrac{1}{3}\times\pi\left(\dfrac{2\sqrt{14}}{3}\right)^2\times\left(6-\dfrac{5}{3}\right)$

$=\dfrac{\pi}{3}\times\dfrac{56}{9}\times\dfrac{13}{3}$ より，

$\therefore\ V_2=\dfrac{728}{81}\pi$ である。……………………………(答)