よって，②は，$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$ $\left[F(n+1)=\frac{1}{2}F(n)\right]$

$\therefore\ b_n-3=(\underbrace{b_1}_{2}-3)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $\left[\ F(n)\ =F(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]$

これに，$b_1=2$ を代入して，求める $\{b_n\}$ の一般項 $b_n$ は，

$b_n=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………③ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるんだね。

(3) $b_n=\frac{1}{a_n}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ……③ より，$a_n=\dfrac{1}{3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

よって，求める極限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ は，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3-\underbrace{\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}}_{0}}=\frac{1}{3}$$ となって，答えだ！ 大丈夫だった？

どう？ 等比関数列型の漸化式の解法の威力が十分に分かっただろう？ ン？ でも，もっと他の漸化式にも使えないのかって？ この解法パターンは実は様々な漸化式の解法に利用できる。

ここではさらに，$a_{n+1}=pa_n+q^n$の形の漸化式の問題と，対称形（たいしょうけい）の連立の漸化式の解法についても解説しておこう。

## ● $a_{n+1}=pa_n+q^n$ のタイプの漸化式にも挑戦しよう！

$a_{n+1}=pa_n+q^n$の形の漸化式が出てきたら，定数$\alpha$を用いて，これを，

$a_{n+1}+\alpha q^{n+1}=p(a_n+\alpha q^n)$ ($\alpha$ : 定数) と変形しよう。すると，これは等比

$[\ F(n+1)\ \ =p\ \ F(n)\ \ ]$

関数列型の漸化式 $F(n+1)=p\cdot F(n)$ となるので，$F(n)=F(1)\cdot p^{n-1}$として解いていけばいいんだね。つまり，アッという間に解けるんだね。

それでは，次の練習問題で，このタイプの漸化式と極限の問題を解いてみよう。

## 練習問題 58　$a_{n+1}=pa_n+q^n$ の極限　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n$ ……①　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されるとき，次の各問いに答えよ。

(1) ①を変形して，$a_{n+1}+\alpha\cdot2^{n+1}=3(a_n+\alpha\cdot2^n)$ ……② とするとき，定数 $\alpha$ の値を求めよ。

(2) 一般項 $a_n$ を求めて，極限 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{2^n}$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^n}$，$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{6^n}$ を求めよ。

(1)の②は，$F(n+1)=3F(n)$ の形をしている。この形になるような定数 $\alpha$ の値を①との比較により，求めよう。(2)では，一般項 $a_n$ を求め，与えられた各極限を求めよう。

(1) $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n$ ……①　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，

①を変形して，

$a_{n+1}+\alpha\cdot2^{n+1}=3(a_n+\alpha\cdot2^n)$ ……② になったものとする。

$[\ F(n+1)\quad =3\cdot\ F(n)\ ]$

$F(n)=a_n+\alpha\cdot2^n$ とおくと，$n$ の代わりに $n+1$ を代入して，$F(n+1)=a_{n+1}+\alpha\cdot2^{n+1}$ となる。

②を変形すると，

$a_{n+1}+\underbrace{2\alpha\cdot2^n}_{\alpha\cdot2^{n+1}}=3a_n+3\alpha\cdot2^n$　　$a_{n+1}=3a_n+\underbrace{3\alpha\cdot2^n-2\alpha\cdot2^n}_{(3\alpha-2\alpha)\cdot2^n=\alpha\cdot2^n}$

$a_{n+1}=3a_n+\underbrace{\alpha}_{1\text{（①と比較して）}}\cdot2^n$ …②´となるので，②´と①を比較すると，$\alpha$ が決定されて

$\alpha=1$ であることが分かる。

(2) $\alpha=1$ を②に代入すると，

$a_{n+1}+2^{n+1}=3(a_n+2^n)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ より，

$[\ F(n+1)\ =3\cdot F(n)\ ]$

アッという間

$a_n+2^n=(a_1+2^1)\cdot3^{n-1}$ ……③ となる。

$[\ F(n)\ =\ F(1)\cdot\ \ 3^{n-1}\ ]$

$a_n + 2^n = (\underbrace{a_1}_{1} + 2) \cdot 3^{n-1}$ ……③ に，$a_1 = 1$ を代入すると，

$a_n = 3 \cdot 3^{n-1} - 2^n$ より，

∴一般項 $a_n$ は，次のように求められる。

$a_n = 3^n - 2^n$ ……④　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

次に，$a_n$ を用いた3つの各極限を求めてみよう。

(i) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{2^n}$　（④より）

$\displaystyle = \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\left(\frac{3}{2}\right)^n}_{\infty} - 1 \right\} = \infty - 1 = \infty$ となる。

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty & (r > 1) \\ 1 & (r = 1) \\ 0 & (0 < r < 1) \end{cases}$$

(ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ 1 - \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{0} \right\} = 1 - 0 = 1$ となる。

(iii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{0} - \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^n}_{0} \right\} = 0 - 0 = 0$

となるんだね。大丈夫だった？

## ● 対称形の連立の漸化式にもチャレンジしてみよう！

連立方程式では，2つの未知数 $x$ と $y$ を求めたように，連立の漸化式では，2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の関係式になっているんだね。エッ！　急にハードルが高くなって，難しそうだって!?　確かに，レベルは少し上がるけれど，この解法も，等比関数列型の漸化式の考え方を使えば，シンプルに解けるので，そんなに心配する必要はないよ。

それではここで，対称形（たいしょうけい）の連立の漸化式と極限の問題を，例題を使って，具体的に紹介しよう。