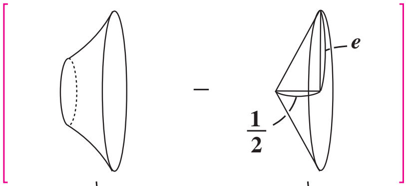
以上より，求める回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{2x})^2dx-\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\boxed{\pi e^2}}_{\text{底面積}}\cdot\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}}}_{\text{高さ}}$$



中身のつまった回転体　　空洞部分に当たる円すい

これを引く(くり抜く！)

$$=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}e^{4x}dx-\frac{\pi}{6}e^2=\pi\left[\frac{1}{4}e^{4x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{6}e^2$$

$(e^{4x})'=4\cdot e^{4x}$ より，$\int e^{4x}dx=\frac{1}{4}e^{4x}+C$ だね。

$$=\frac{\pi}{4}(e^2-\underbrace{e^0}_{1})-\frac{\pi}{6}e^2=\underbrace{\frac{\pi}{4}e^2-\frac{\pi}{6}e^2}_{\frac{3-2}{12}\pi e^2=\frac{\pi}{12}e^2}-\frac{\pi}{4}$$

$=\frac{\pi}{12}e^2-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}(e^2-3)$　となって，答えだね。

ではもう 1 題，空洞のある回転体の体積の練習問題を解いてみよう。

練習問題 54　回転体の体積（Ⅳ）　CHECK1　CHECK2　CHECK3

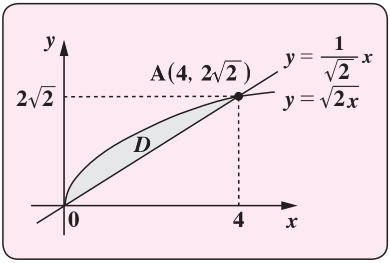
曲線 $y=\sqrt{2x}$ と直線 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x$ とで囲まれる図形を D とおく。

(1) D を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_x を求めよ。

(2) D を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V_y を求めよ。

まず，曲線 $y=\sqrt{2x}$ と直線 $y=\frac{1}{\sqrt{2}}x$ が，原点 $O(0, 0)$ と点 $A(4, 2\sqrt{2})$ で共有点をもつことを調べて，図形 D の概形を図示するといいね。後は (1) x 軸のまわりの回転体の公式と，(2) y 軸のまわりの回転体の公式をうまく利用して解いていこう。

$$\begin{cases} y=\sqrt{2x} & \cdots\cdots ① \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x & \cdots\cdots ② \end{cases}$$ から y を消去して，



$\sqrt{2}\cdot\sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x \qquad x=2\sqrt{x}$

$\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)=0$ より，

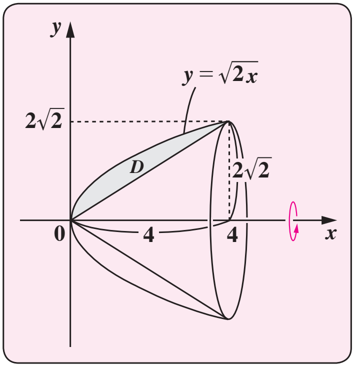
$\sqrt{x}=0$ または $2 \qquad \therefore\ x=0$ または 4

$x=0$ を①に代入して，$y=\sqrt{2\times 0}=0$

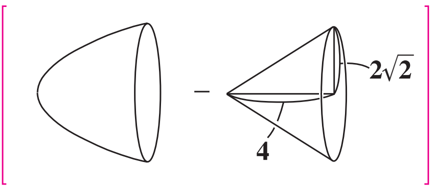
$x=4$ を①に代入して，$y=\sqrt{2\times 4}=2\sqrt{2}$

よって，曲線①と直線②は原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(4,\ 2\sqrt{2})$ を共有点にもち，これらで囲まれる図形 D は，右上図のようになるんだね。

(1) まず，図形 D を x 軸のまわりに回転した回転体の体積 V_x は，右図から明らかに，



$$V_x=\pi\int_0^4 \overbrace{(\sqrt{2x})^2}^{y^2}\,dx-\frac{1}{3}\cdot\overbrace{\pi(2\sqrt{2})^2}^{\text{底面積}}\cdot\overbrace{4}^{\text{高さ}}$$



曲線 $y=\sqrt{2x}\ (0\leqq x\leqq 4)$ と x 軸とで挟まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積から，底面積 $\pi(2\sqrt{2})^2$，高さ 4 の円すいの体積を引くんだね。

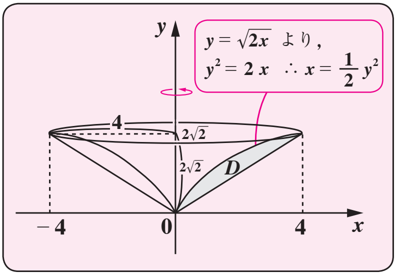
$$=2\pi\underbrace{\int_0^4 x\,dx}_{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4=\frac{16}{2}=8}-\frac{\pi}{3}\cdot 8\cdot 4=16\pi-\frac{32}{3}\pi=\frac{48-32}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$$ となる。

(2) 次に，図形 D を y 軸のまわりに回転した回転体の体積 V_y は，

曲線 $y=\sqrt{2x}$ …① を変形すると，

$y^2=2x \qquad \therefore\ x=\dfrac{1}{2}y^2$ …①′

となるので，右図から明らかに，



$$V_y=\frac{1}{3}\cdot\overbrace{\boxed{\pi\cdot4^2}}^{\text{底面積}}\cdot\overbrace{\boxed{2\sqrt{2}}}^{\text{高さ}}-\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\overbrace{\boxed{\left(\frac{1}{2}y^2\right)^2}}^{x^2}dy$$

底面積 $\pi\cdot4^2$，高さ $2\sqrt{2}$ の円すいの体積から，曲線 $x=\dfrac{1}{2}y^2\ (0\leqq y\leqq 2\sqrt{2})$ と y 軸とで挟まれる図形を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積を，引けばいいんだね。

$$=\frac{1}{3}\cdot\pi\cdot16\cdot2\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}\underbrace{\int_0^{2\sqrt{2}}y^4dy}_{}=\frac{32\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{1}{\cancel{4}}\cdot\frac{32\times\cancel{4}\sqrt{2}}{5}\pi$$

$$\boxed{\frac{1}{5}\left[y^5\right]_0^{2\sqrt{2}}=\frac{(2\sqrt{2})^5}{5}=\frac{2^5\cdot(\sqrt{2})^5}{5}=\frac{32\times4\sqrt{2}}{5}}$$

$$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\cdot32\sqrt{2}\,\pi=\frac{5-3}{15}\times32\sqrt{2}\,\pi=\frac{64\sqrt{2}}{15}\pi$$ となるんだね。大丈夫？

● 媒介変数表示された曲線と体積の問題も解こう！

図 4 に示すように，媒介変数表示された曲線

$$\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=g(\theta) \end{cases} \quad (\theta：媒介変数)$$

と x 軸とで挟まれる図形を x 軸のまわりに回転した回転体の体積 V は，まず，この曲線が $y=h(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ で表されているつもりで，

図 4　媒介変数表示された曲線と x 軸とで挟まれる図形の x 軸のまわりの回転体の体積 V