$\int_a^b f(t)\,dt = A$ (定数) とおけばいいんだね。

(Ⅱ) $\int_a^x f(t)\,dt = [F(t)]_a^x = \underbrace{F(x)}_{x\text{の関数}} - \underbrace{F(a)}_{\text{定数}}$ となって，

これは，x の関数になる。よって，この場合やることは次の 2 つだ。

(ⅰ) まず，x に a を代入すると，

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) - F(a) = 0$$ となる。

(ⅱ) $F(t)$ は $f(t)$ の原始関数より，$F'(t) = f(t)$ となる。ということは，文字はなんでも構わないので，$F'(x) = f(x)$ としてもいいね。

よって，$\int_a^x f(t)\,dt$ を x で微分すると，

$$\left\{\int_a^x f(t)\,dt\right\}' = \{F(x) - \underbrace{\cancel{F(a)}}_{\text{定数}}\}' = F'(x) = f(x)$$ となる。

ン？まだピンとこないって？いいよ。これから，練習問題で練習しよう。ここで，この定積分で表された関数の 1 番のポイントを次に示しておこう。

(Ⅰ) 積分区間が a から b のように，定数から定数までのとき，たとえば $\int_a^b f(t)dt$ だけでなく，$\int_a^b g(t)dt$ や，$\int_a^b t f(t)dt$ や，$\int_a^b \sin t \cdot f(t)dt$ など…の場合，積分した結果の t に，定数 a と b が代入されるわけだから，これらはすべて定数なんだね。したがって，これらはどれもバ～ンと定数 A とおくことができるんだね。

これに対して，

(Ⅱ) 積分区間が a から x のように，定数 a から変数 x までのときであれば，$\int_a^x f(t)dt$ だけでなく，$\int_a^x g(t)dt$ や $\int_a^x t f(t)dt$ など…は，すべて積分結果の t に定数 a と変数 x が代入されるわけだから，x の関数になる。

これを頭に入れて，実際に問題を解いてみよう。

練習問題 44　定積分で表された関数 (Ⅰ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

関数 $f(x)$ は，$f(x)=e^x+\int_0^2 f(t)\,dt$ ……① をみたす。
このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

①の右辺の定積分は，0 (定数) から 2 (定数) までの定積分だから，当然この積分結果は定数になる。よって，$\int_0^2 f(t)\,dt=A$ (定数) とおいて，解けばいいんだね。頑張ろう！

$f(x)=e^x+\underbrace{\int_0^2 f(t)\,dt}_{A\,(\text{定数})}$ …① の，右辺の定積分は定数なので，

$\int_0^2 f(t)\,dt=A$(定数) …② とおくと，①は，

$f(x)=e^x+A$ …①′ となる。← これから，A の値を求めればいい。

①′の変数 x を変数 t に置き換えると，

$f(t)=e^t+A$ …①″ となる。①″を②に代入すると，← 文字変数はなんでも構わない。

$\int_0^2 (e^t+A)\,dt=A$　　$[e^t+At]_0^2=A$

$e^2+A\cdot 2-(\underbrace{e^0}_{1}+\cancel{A\cdot 0})=A$　　$2A+e^2-1=A$

$\therefore A=1-e^2$ …③　となるんだね。

よって，③を①′に代入すると，求める関数 $f(x)$ は

$f(x)=e^x+1-e^2$ となって，答えだ！納得いった？

ン？少し混乱してるって？そうだね，この手の問題の解法に慣れるには，少し時間がかかると思う。この問題も繰り返し解いてみるといいよ。

　それでは，さらにもう 2 題解くことによって，定積分を A (定数) とおくタイプの問題を完璧にマスターしようね！

練習問題 45	定積分で表された関数（Ⅱ）	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は，$f(x)=\cos x-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f(t)dt$ ………① をみたす。

このとき，関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) 関数 $g(x)$ は，$g(x)=\sin 2x+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot g(t)dt$ ……㋐ をみたす。

このとき，関数 $g(x)$ を求めよ。

①，㋐ともに，右辺の定積分は，0（定数）から $\frac{\pi}{2}$（定数）までの積分だから，当然この積分結果は定数となる。よって，これを A（または B，定数）とおいて，この A（または B）を求めればいいんだね。少し応用問題になっているけれど，頑張って解いてみよう。

(1) $f(x)=\cos x-\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f(t)dt}_{A\text{(定数)とおく}}$ ……① の右辺の定積分は定数なので，

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f(t)dt=A$（定数）……② とおくと，①は，

$f(x)=\cos x-A$ ……①′ となる。 ← これから，A の値を求めよう。

①′の変数 x を変数 t に置き換えると，

$f(t)=\cos t-A$ ……①″ となる。①″を②に代入すると，

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(\cos t-A)dt=A$ より，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\cos^2 t}_{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)}dt-A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=A$ ← 半角の公式

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt-A\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=A$$

$$\frac{1}{2}\left[t+\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-A\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=A$$

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}+\cancel{\frac{1}{2}\underbrace{\sin\pi}_{0}}-\left(\cancel{0}+\cancel{\frac{1}{2}\underbrace{\sin 0}_{0}}\right)\right\}-A\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\cancel{\underbrace{\sin 0}_{0}}\right)=A$$

よって，$\dfrac{\pi}{4}-A=A$ より，$2A=\dfrac{\pi}{4}$　$\therefore A=\dfrac{\pi}{8}$ ……③ となる。

③を①′に代入して，

$f(x)=\cos x-\dfrac{\pi}{8}$　となって，答えが導けるんだね。大丈夫だった？

(2) $g(x)=\sin 2x+2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot g(t)\,dt}_{B\text{(定数)とおく}}$ ……㋐ の右辺の定積分は定数なので，

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot g(t)\,dt=B$ ……㋑ とおくと，㋐は，

$g(x)=\sin 2x+2B$ ……㋐′ となる。 ← これから，B の値を求めよう。

㋐′の変数 x を変数 t に置き換えると，

$g(t)=\sin 2t+2B$ ……㋐″ となる。㋐″を㋑に代入すると，

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot(\sin 2t+2B)\,dt=B$ より，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\underbrace{\sin 2t\cos t}_{\frac{1}{2}\{\sin(2t+t)+\sin(2t-t)\}}dt+2B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=B$

積→和の公式
$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 3t+\sin t)\,dt+2B\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=B$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{3}\cos 3t-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2B\left[\sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=B$$

$$\frac{1}{2}\Bigg(\cancel{-\frac{1}{3}\underbrace{\cos\frac{3}{2}\pi}_{0}}\cancel{-\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0}}+\frac{1}{3}\underbrace{\cos 0}_{1}+\underbrace{\cos 0}_{1}\Bigg)+2B\Bigg(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}-\cancel{\underbrace{\sin 0}_{0}}\Bigg)=B$$

$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}+1\right)+2B\times 1=B$　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}+2B=B$　$\therefore B=-\dfrac{2}{3}$ ……㋒

㋒を㋐′に代入して，

$g(x)=\sin 2x+2\times\left(-\dfrac{2}{3}\right)=\sin 2x-\dfrac{4}{3}$　となって，答えだ！

これも，大丈夫？

では次，定積分の結果が x の関数となる(Ⅱ)のタイプの問題を解いてみよう。

練習問題 46　定積分で表された関数(Ⅲ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

関数 $f(x)$ は，$(x^3+ax^2)e^x=\int_1^x tf(t)dt$ ……① をみたす。

このとき，a の値と関数 $f(x)$ を求めよ。

①の右辺の定積分 $\int_1^x tf(t)\,dt$ は x の関数になるので，この解法のパターンは，(ⅰ)まず，x に 1 を代入して，a の値を求め，(ⅱ)次に，①の両辺を x で微分して，関数 $f(x)$ を求めればいいんだね。今日最後の問題だ！頑張ろう!!

$(x^3+ax^2)e^x=\int_1^x tf(t)\,dt$ ……① について，

(ⅰ)①の x に 1 を代入すると，

$$(1^3+a\cdot1^2)e^1=\underbrace{\int_1^1 tf(t)\,dt}_{0}$$

$tf(t)=g(t)$ とおき，また

$\int g(t)\,dt=G(t)+C$ とおくと，

$\int_1^1 g(t)\,dt=[G(t)]_1^1$

$=G(1)-G(1)=0$

となる。

$$(1+a)\underbrace{e}_{\oplus}=0$$

ここで，$e>0$ より，この両辺を e で割って，

$a+1=0$　$\therefore\ a=-1$ ……② となるんだね。

②を①に代入して，

$(x^3-x^2)e^x=\int_1^x tf(t)\,dt$ ……①′ となる。

(ⅱ)次に，①′の両辺を x で微分して，

$$\{(x^3-x^2)e^x\}'=\underbrace{\left\{\int_1^x tf(t)\,dt\right\}'}_{xf(x)}$$

$tf(t)=g(t)$ とおくと，

$\left\{\int_1^x g(t)\,dt\right\}'$

$=\{G(x)-G(1)\}'$

$=g(x)=xf(x)$

となるんだね。

公式：$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

$$\underbrace{(x^3-x^2)'}_{(3x^2-2x)}e^x+(x^3-x^2)\underbrace{(e^x)'}_{e^x}=x\cdot f(x)$$

$$\underbrace{(3x^2-2x)e^x+(x^3-x^2)e^x}_{\boxed{(3x^2-2x+x^3-x^2)e^x=(x^3+2x^2-2x)e^x}}=x\cdot f(x)$$

$$x\cdot f(x)=x(x^2+2x-2)e^x$$

両辺を比較して，求める関数 $f(x)$ は，

$f(x)=(x^2+2x-2)e^x$　となって，答えだ！

これで，2 通りの定積分で表された関数の解法パターンも理解できたと思う。面白かった？

以上で，“**積分法**”の講義は，すべて終了です。これまでの講義をシッカリ復習して，マスターしてしまえば，様々な積分計算が自在にできるようになるから，自分で納得がいくまで，何度でも反復練習しておこう。

教科書では，“**区分求積法**(くぶんきゅうせきほう)”や“**定積分**(ていせきぶん)**と不等式**(ふとうしき)”を，この“**積分法**”の章の中で扱っているものが多いと思うけれど，これらは，面積計算と密接に関連しているので，次回から講義する“**積分法の応用**”の中で詳しく解説しようと思う。

次の講義もまた分かりやすく親切に解説するつもりだから，みんな楽しみに待っていてくれ。それじゃ，みんな体調に気をつけて，次回も元気な顔を見せてくれ！さようなら…。