練習問題 54 階差数列型漸化式と極限 CHECK 1 CHECK 2 CHECK 3

常に負の値をとる数列 $\{a_n\}$ が

$a_1=-1,\ a_{n+1}-a_n=2n\,a_na_{n+1}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定義される。このとき，次の各問いに答えよ。

(1) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおいて，b_n と b_{n+1} の関係式を導き，一般項 b_n と a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を求めよ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2a_n$ を求めよ。

(1) ①を変形して，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=-2n$ となるので，階差数列の漸化式 $b_{n+1}-b_n=-2n$ が導ける。よって，これを解いて，一般項 b_n と a_n を求めよう。(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2a_n$ は $\dfrac{(2\text{次の}\infty)}{(2\text{次の}-\infty)}$ の形になるはずだ。これも頑張って求めよう！

(1) 漸化式：$a_1=-1,\ a_{n+1}-a_n=2n\,a_na_{n+1}$ ……① $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

について，$a_n<0$ より，①の両辺を $\underbrace{a_n}_{\ominus}\underbrace{a_{n+1}}_{\ominus}$ (>0) で割ると，

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_na_{n+1}}=2n,\quad \frac{\cancel{a_{n+1}}}{a_n\cancel{a_{n+1}}}-\frac{\cancel{a_n}}{\cancel{a_n}a_{n+1}}=2n$$

$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}=2n$ 　この両辺に -1 をかけて，

$\underbrace{\dfrac{1}{a_{n+1}}}_{b_{n+1}}-\underbrace{\dfrac{1}{a_n}}_{b_n}=-2n$ ……② となる。ここで，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ $\left(b_{n+1}=\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$ と

おくと，②は，$b_{n+1}-b_n=-2n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となる。

また，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{-1}=-1$ より，

階差数列型の漸化式

$$\begin{cases} b_1=-1 \\ b_{n+1}-b_n=\underbrace{-2n}_{c_n\text{とおく。}} \text{ ……③} \end{cases}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が導ける。

$b_{n+1}-b_n=c_n$ のとき，$n\geqq2$ で，$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}c_k$ となる。

よって，$n \geqq 2$ で，

$$b_n = \underbrace{b_1}_{-1} + \sum_{k=1}^{n-1} (\underbrace{-2k}_{c_k}) = -1 - 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} k}_{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

Σ計算の公式：

$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ より，

$\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{1}{2}(n-1)(n-1+1)$

$= \frac{1}{2}n(n-1)$ となる。

$$= -1 - \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} n(n-1) = -1 - n^2 + n$$

$\therefore\ b_n = -n^2 + n - 1$ ……③　$(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

n は，2 スタート。

ここで，③に $n=1$ を代入すると，

$b_1 = -1^2 \cancel{+1} \cancel{-1} = -1$ となって，$b_1 = -1$ をみたす。よって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は，$b_n = -n^2 + n - 1$ ……③′　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

n は 1 スタートなので，これは一般項だね。

③′より，$b_n = \frac{1}{a_n} = -n^2 + n - 1$　これから，数列 $\{a_n\}$ の一般項は，

$a_n = \frac{1}{-n^2+n-1}$ ……④　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となるんだね。大丈夫だった？

(2) ④より，極限 $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ を求めると，

$$\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{-n^2+n-1}$$

これは，$\frac{(2\text{次の}\infty)}{(2\text{次の}-\infty)}$ の不定形なので，分子・分母を n^2 で割ればいいんだね。

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{0}}$$

$$= \frac{1}{-1+0-0} = -1 \text{ となって，答えだ！}$$

この練習問題は数列の逆数を取ったりして，結構レベルが高い問題だったんだけれど，面白かったでしょう？これで階差数列型の漸化式と極限の解説は終了です。