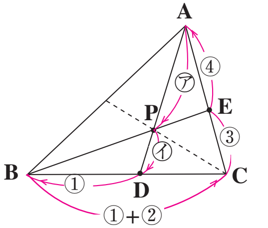
ⓐ：ⓘを使う 2 組のメネラウスの定理を用いれば，チェバの定理も簡単に証明できるんだね。頑張ろう！

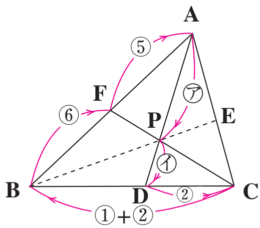
右図に示すように，△ABC と線分AD，BE に対してメネラウスの定理を用いるよ。



$$\frac{①+②}{①}\times\frac{④}{③}\times\frac{ⓘ}{ⓐ}=1 \quad \cdots\cdots (a)$$

となる。

さらに，右図に示すように，△ABC と線分AD，CF に対してメネラウスの定理を用いると，



$$\frac{①+②}{②}\times\frac{⑤}{⑥}\times\frac{ⓘ}{ⓐ}=1 \quad \cdots\cdots (b)$$

となる。

よって，$(a)\div(b)$ による割り算を行うと，

$$\frac{①+②}{①}\times\frac{④}{③}\times\frac{ⓘ}{ⓐ}\div\underline{\left(\frac{①+②}{②}\times\frac{⑤}{⑥}\times\frac{ⓘ}{ⓐ}\right)}=\boxed{\frac{1}{1}}^{1}$$

$$\frac{\cancel{①+②}}{①}\times\frac{④}{③}\times\frac{\cancel{ⓘ}}{\cancel{ⓐ}}\times\underline{\left(\frac{②}{\cancel{①+②}}\times\frac{⑥}{⑤}\times\frac{\cancel{ⓐ}}{\cancel{ⓘ}}\right)}=1$$

割り算は，逆数をとって，かけ算にすればいいんだね。

これをまとめると，チェバの定理：$\frac{②}{①}\times\frac{④}{③}\times\frac{⑥}{⑤}=1 \quad \cdots (*2)$

もキレイに導くことが出来るんだね。面白かった?

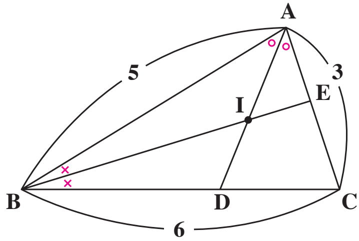
それでは最後にもう 1 題，三角形の内心 I とメネラウスの定理が組み合わされた問題を解いてみよう。定理や公式は，証明も大事だけれど，これらを実際に使って問題を解くことにより，慣れていくことがとても大切なんだね。

練習問題 45　内心・メネラウスの定理　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

右図に示すように，AB = 5，BC = 6，CA = 3 の△ABC があり，△ABC の内心を I とする。直線 AI と辺 BC との交点を D とおき，また直線 BI と辺 CA との交点を E とおく。

このとき，次の線分の比を求めよ。

(i) AI：ID　(ii) BI：IE



線分 AD は，頂角 (内角) ∠A の 2 等分線なので，BD：DC = AB：AC = 5：3 となる。同様に，CE：EA = 6：5 となる。これから，メネラウスの定理を用いて，線分の比 (i) AI：ID (ii) BI：IE を求めることができるんだね。頑張ろう！

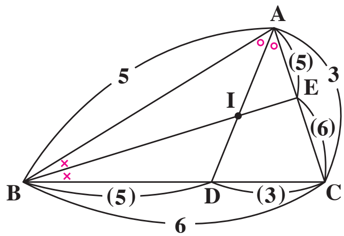
△ABC の内心を I とおくと，右図に示すように，

・線分 AD(または，AI) は，頂角∠A の 2 等分線なので，

$$BD : DC = \underbrace{AB}_{5} : \underbrace{AC}_{3} = 5 : 3 \text{ である。}$$

・線分 BE(または，BI) は，頂角∠B の 2 等分線なので，

$$CE : EA = \underbrace{BC}_{6} : \underbrace{BA}_{5} = 6 : 5 \text{ である。}$$

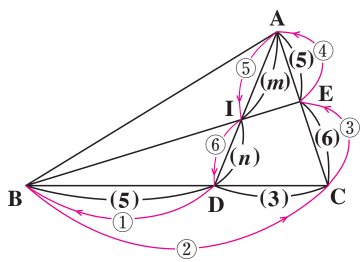


(i) よって，AI：ID = m：n とおくと，図 (i) より，メネラウスの定理を用いて，

$$\frac{5+3}{5} \times \frac{5}{6} \times \frac{n}{m} = 1$$

$$\left[\frac{②}{①} \times \frac{④}{③} \times \frac{⑥}{⑤} = 1 \right]$$

図 (i)　AI：ID = m：n



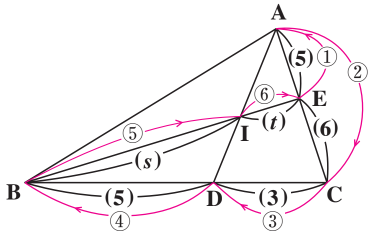
$$\frac{8}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{6} \times \frac{n}{m} = 1 \qquad \frac{n}{m} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

∴求める **2** つの線分の比 **AI** : **ID** は,

AI : **ID** $= m : n = 4 : 3$ となるんだね。大丈夫?

(ii) 次に **BI** : **IE** $= s : t$ とおくと, 図 (ii) より, メネラウスの定理を用いて,

図 (ii) BI : IE $= s : t$



$$\frac{5+6}{5} \times \frac{5}{3} \times \frac{t}{s} = 1$$

$$\left[\ \frac{②}{①} \times \frac{④}{③} \times \frac{⑥}{⑤} = 1\ \right]$$

"行って, 戻って, 行って行って中に切り込む" と覚えよう!

$$\frac{11}{\cancel{5}} \times \frac{\cancel{5}}{3} \times \frac{t}{s} = 1 \qquad \frac{t}{s} = \frac{3}{11}$$

∴求める **2** つの線分の比 **BI** : **IE** は,

BI : **IE** $= s : t = 11 : 3$ となって, 答えだ!

参考

直線 **CI** と辺 **AB** との交点を **F** とおくと, **AF** : **FB** = **CA** : **CB** = **3** : **6** = **1** : **2** となる。よって, 同様に, メネラウスの定理を使って **CI** : **IF** の比を求めることができる。答えは, **CI** : **IF** = **9** : **5** となるんだね。これで間違いないか, 自分でも確認してみよう!

以上で今日の講義も終了です! みんな, よく頑張ったね。かなり, 内容が濃かったと思うから, 次回の講義まで, 何度でも自分が納得がいくまで, ヨ～ク復習しておいてくれ。

それじゃ, 次回の講義でまた会おうな! さようなら……。