練習問題 53　オイラーの多面体定理 (Ⅲ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

f 個の合同な面をもつ正 f 面体がある。この正 f 面体の頂点の個数 v と辺の数 e は，f によって，次のように表される。

$v = f^2 - 3f$ ……①　　$e = 3f - 6$ ……②

(1) f と v と e の値を求めよ。

(2) この正 f 面体の一辺の長さが 2 であるとき，この正 f 面体の表面積 S を求めよ。

(1) オイラーの多面体定理の公式：$f + v - e = 2$ ……(*) に，①，②を代入すると，f の 2 次方程式となるので，これを解けばいいんだね。(2) は，正 f 面体の表面積を求める問題だけれど，1 つの側面の多角形の面積を求めて，それに f をかければいいんだね。頑張ろう！

(1) 正 f 面体の頂点の数 v と，辺の数 e は，f によって，

$v = f^2 - 3f$ ……①　　$e = 3f - 6$ ……②　と表される。

ここで，オイラーの多面体定理の公式より，

$f + v - e = 2$ ……(*)　だね。

「メンテ代から千円引いて，ニッコリ」と覚えよう！
（メン：f，テ：v，千：e，ニッコリ：2）

よって，①，②を (*) に代入してまとめると，

$f + \underbrace{f^2 - 3f}_{v\ (①より)} - (\underbrace{3f - 6}_{e\ (②より)}) = 2$,　$f^2 - 2f - 3f + 6 = 2$

$f^2 - 5f + 4 = 0$ ……③　となって，f の 2 次方程式となるんだね。

③を解くと，

$(f-1)(f-4) = 0$　より，$f = 4$ ……④　($f = 1$ は不適)

1 つの面だけで正多面体は作れないからね。

これから，この立体は正四面体である。

4 つの正三角形を表面にもつ正三角すいのことだ！

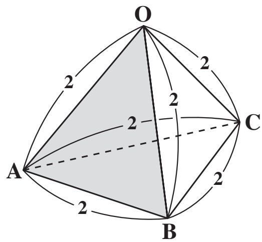
④を①に代入して，$v = 4^2 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4$

④を②に代入して，$e = 3 \cdot 4 - 6 = 12 - 6 = 6$

以上より，求める正 f 面体は，

面の数 $f = 4$，頂点の数 $v = 4$，辺の数 $e = 6$ の正四面体である。

(2) 一辺の長さが **2** の正四面体，すなわち **4** つの正三角形 (辺の長さ **2**) を側面にもつ正三角すいを，右図のように **O-ABC** とおく。



ここで，この正四面体 **O-ABC** の表面積を S とおくと，S は，

$S = 4 \times \underbrace{\triangle OAB}_{}$ ……⑤ となる。

これは，三角形 **OAB** の面積を表している。

ここで，$\triangle OAB = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$ ……⑥

となるのはいいね。

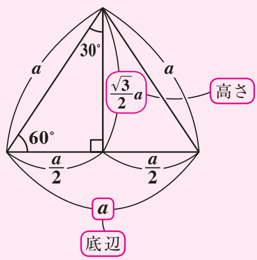
よって，⑥を⑤に代入して求める正四面体 **O-ABC** の表面積 S は，

$S = 4 \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ となって，答えだね。

これで，オイラーの多面体定理の利用の仕方にも自信がついたと思う。

一般に **1** 辺の長さ a の正三角形の面積は，

$$\frac{1}{2} \times \underbrace{a}_{底辺} \times \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}a}_{高さ} = \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}_{これは公式として覚えよう}$$



今回，$a = 2$ より，

$\triangle OAB = \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$ となる。