

それでは最後にもう 1 題、共分散 S_{XY} と相関係数 r_{XY} の問題を解いておこう。
 これで、 S_{XY} と r_{XY} の計算も十分に自信がもてるはずだ。

練習問題 39

共分散と相関係数

CHECK 1

CHECK 2

CHECK 3

次の 8 組の 2 変数データがある。

$$\left(\begin{array}{c} \overline{10} \\ \overline{x_1} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{6} \\ \overline{y_1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{8} \\ \overline{x_2} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{7} \\ \overline{y_2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{9} \\ \overline{x_3} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{10} \\ \overline{y_3} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{7} \\ \overline{x_4} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{3} \\ \overline{y_4} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{x_5} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{5} \\ \overline{y_5} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{4} \\ \overline{x_6} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{5} \\ \overline{y_6} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{5} \\ \overline{x_7} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{4} \\ \overline{y_7} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{12} \\ \overline{x_8} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{8} \\ \overline{y_8} \end{array} \right)$$

ここで、2 変数 X, Y を、

$$\begin{cases} X = 10, 8, 9, 7, 1, 4, 5, 12 \\ Y = 6, 7, 10, 3, 5, 5, 4, 8 \end{cases} \quad \text{とおくとき,}$$

X と Y の共分散 S_{XY} と相関係数 r_{XY} を求めよ。

今回は、8 組のデータなので、データ数が多いけれど、前回と同様に表を利用して、 X と Y の標準偏差 S_X と S_Y 、共分散 S_{XY} を求め、これから相関係数 r_{XY} を $r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y}$ から求めればいんだね。頑張ろう！

8 組の 2 変数データを

$$(X, Y) = \left(\begin{array}{c} \overline{10} \\ \overline{x_1} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{6} \\ \overline{y_1} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{8} \\ \overline{x_2} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{7} \\ \overline{y_2} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{9} \\ \overline{x_3} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{10} \\ \overline{y_3} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{7} \\ \overline{x_4} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{3} \\ \overline{y_4} \end{array} \right), \\ \left(\begin{array}{c} \overline{1} \\ \overline{x_5} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{5} \\ \overline{y_5} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{4} \\ \overline{x_6} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{5} \\ \overline{y_6} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{5} \\ \overline{x_7} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{4} \\ \overline{y_7} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} \overline{12} \\ \overline{x_8} \end{array}, \begin{array}{c} \overline{8} \\ \overline{y_8} \end{array} \right) \quad \text{とおこう。よって,}$$

$$\begin{cases} X = x_1, x_2, x_3, \dots, x_8 = 10, 8, 9, \dots, 12 \\ Y = y_1, y_2, y_3, \dots, y_8 = 6, 7, 10, \dots, 8 \end{cases} \quad \text{より,}$$

2 変数 X と Y の平均値 m_X と m_Y 、標準偏差 S_X と S_Y 、そして共分散 S_{XY} を次の表を利用して求め、相関係数 r_{XY} を

公式： $r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y}$ を使って求めよう。

表5 標準偏差 S_X , S_Y と共分散 S_{XY} の計算

データ X から平均値 $m_X=7$ を引いたもの データ Y から平均値 $m_Y=6$ を引いたもの

データ No	データ X	偏差 $x_k - m_X$	偏差平方 $(x_k - m_X)^2$	データ Y	偏差 $y_k - m_Y$	偏差平方 $(y_k - m_Y)^2$	$(x_k - m_X)(y_k - m_Y)$
1	10	3	9	6	0	0	0 = (3 × 0)
2	8	1	1	7	1	1	1 = (1 × 1)
3	9	2	4	10	4	16	8 = (2 × 4)
4	7	0	0	3	-3	9	0 = (0 × (-3))
5	1	-6	36	5	-1	1	6 = (-6 × (-1))
6	4	-3	9	5	-1	1	3 = (-3 × (-1))
7	5	-2	4	4	-2	4	4 = (-2 × (-2))
8	12	5	25	8	2	4	10 = (5 × 2)
合計	56	0	88	48	0	36	32
平均	$\frac{7}{8}$		$\frac{11}{8}$	$\frac{6}{8}$		$\frac{9}{2}$	$\frac{4}{8}$
	m_X		S_X^2	m_Y		S_Y^2	S_{XY}

以上より、

X の平均値 $m_X=7$ 、分散 $S_X^2=11$ 、標準偏差 $S_X=\sqrt{S_X^2}=\sqrt{11}$

Y の平均値 $m_Y=6$ 、分散 $S_Y^2=\frac{9}{2}$ 、標準偏差 $S_Y=\sqrt{S_Y^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

X と Y の共分散 $S_{XY}=4$ ……(答)

よって、X と Y の相関係数 r_{XY} は、

$$r_{XY} = \frac{S_{XY}}{S_X \cdot S_Y} = \frac{4}{\sqrt{11} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{22}}{33} \dots\dots(答)$$

ここで、 $\sqrt{22} \approx 4.7$ より、 $r_{XY} \approx 0.57$

よって、右の散布図に示すように X と Y の間には、正の相関があることが分かる。

図4 散布図

