以上より，求める面積 S は，　　　　　　　　　　　この結果は面積公式から求めた。

$$S=\underbrace{\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx}_{㋐}+\underbrace{\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx}_{㋑}=9$$

となって，答えだ！

もちろん，㋐と㋑を実際に積分してみると，

㋐ $$\int_{-2}^{1}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3+x^2+2x\right]_{-2}^{1}$$

$$=\frac{1}{6}\cdot1^3+\underbrace{1^2+2\cdot1}_{3}-\left\{\underbrace{\frac{1}{6}\cdot(-2)^3}_{-\frac{8}{6}=-\frac{4}{3}}+\underbrace{\cancel{(-2)^2}+\cancel{2\cdot(-2)}}_{4-4=0}\right\}$$

$$=\frac{1}{6}+3+\frac{4}{3}=\frac{1+18+8}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$ となるし，

㋑ $$\int_{1}^{4}\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx=\left[\frac{1}{6}x^3-2x^2+8x\right]_{1}^{4}$$

$$=\underbrace{\frac{1}{6}\cdot4^3}_{\frac{32}{3}}\underbrace{-\cancel{2\cdot4^2}+\cancel{8\cdot4}}_{-32+32=0}-\left(\underbrace{\frac{1}{6}\cdot1^3}_{\frac{1}{6}}\underbrace{-2\cdot1^2+8\cdot1}_{-2+8=6}\right)$$

$$=\frac{32}{3}-\frac{1}{6}-6=\frac{64-1-36}{6}=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$ となるので，

$$S=\underbrace{\frac{9}{2}}_{㋐}+\underbrace{\frac{9}{2}}_{㋑}=9$$ となって，ナルホド面積公式で求めた結果と一致するんだね。数学って，よく出来てるだろう！

では，これとよく似たもう 1 つの面積公式も紹介しておこう。2 つの放物線と，これらの共通接線とで囲まれる図形の面積は，次の面積公式を使えば簡単に求めることができる。応用公式ではあるんだけれど，これも試験で狙われる可能性があるので，ここでシッカリ練習しておこう！

面積公式 (Ⅲ)

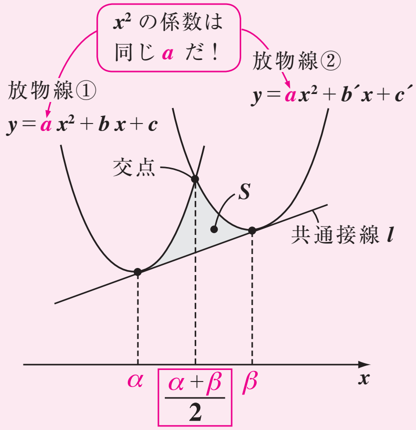
2 つの放物線：

$y = ax^2 + bx + c$ ……①と

$y = ax^2 + b'x + c'$ ……②と，

これらの共通接線 l とで囲まれる図形の面積 S は，2 つの接点の x 座標 α，β $(\alpha < \beta)$ と，x^2 の係数 a の 3 つだけで，次のように簡単に計算できる。

$$S = \frac{|a|}{12}(\beta - \alpha)^3$$



この場合，2 つの放物線①と②の x^2 の係数は共に a で同じでなければならないことに注意しよう。また，この 2 つの放物線①と②の交点の x 座標が $\frac{\alpha+\beta}{2}$ となることも要注意だね。

では，この面積公式も，次の簡単な練習問題で利用してみよう。

練習問題 75　面積公式　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

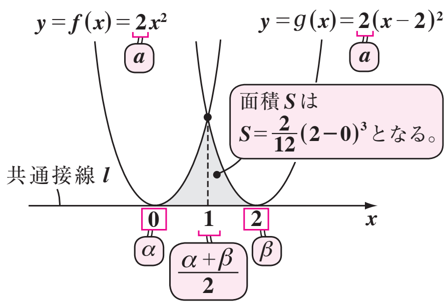
2 つの放物線 $y = f(x) = 2x^2$ ……①と，$y = g(x) = 2(x-2)^2$ ……② と x 軸とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

①の放物線 $y = f(x)$ は原点 $O(0, 0)$ で，また②の放物線 $y = g(x)$ は点 $(2, 0)$ で x 軸と接するので，x 軸が，これら①と②の 2 つの放物線の共通接線になっているんだね。よって，面積公式 (Ⅲ) が利用できるんだね。

$$\begin{cases} y = f(x) = 2x^2 & \cdots\cdots①と \\ y = g(x) = 2(x-2)^2 & \cdots\cdots②は， \end{cases}$$

右図に示すように，x 軸と原点 $(\underset{\alpha}{0}, 0)$ と点 $(\underset{\beta}{2}, 0)$ で接する。

また，①と②の交点の x 座標は，

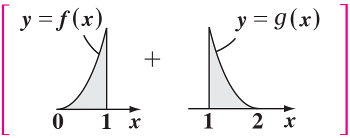


$1\left(=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{0+2}{2}\right)$ である。

よって，①，②の $\mathbf{2}$ つの放物線と，その共通接線である x 軸とで囲まれる図形の面積 S は，

$$S=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^2 g(x)dx$$

$$=\int_0^1 2x^2dx+\int_1^2 2(x-2)^2dx$$



$$=\frac{4}{3}$$ となって，答えだ。

> $\mathbf{2}$ つの放物線①，②と，その共通接線 x 軸とで囲まれる図形の面積 S は，
> $a=2$，$\alpha=0$，$\beta=2$ より，
> $$S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^3$$
> $$=\frac{2}{12}(2-0)^3$$
> $$=\frac{2^4}{12}=\frac{16}{12}=\frac{4}{3}$$
> となる。

これも，まともに積分計算すると，

$$S=2\int_0^1 x^2dx+2\int_1^2(x^2-4x+4)\,dx$$

$$=2\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+2\left[\frac{1}{3}x^3-2x^2+4x\right]_1^2$$

$$=2\times\frac{1}{3}+2\left\{\frac{8}{3}-\cancel{8}+\cancel{8}-\left(\frac{1}{3}-2+4\right)\right\}$$

$$=\frac{2}{3}+2\left(\frac{7}{3}-2\right)=\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$ となって，面積公式で算出した結果と一致するんだね。大丈夫だった？

以上で，**「初めから始める数学Ⅱ　改訂 4」**の講義もすべて終了です！ みんな最後までよく頑張ったね！ やりとげた後の爽快感はまた格別だね。でも，1 回ですべてマスターしたつもりになってはいけないよ。この後，シッカリ復習することだ。そして，次回の講義では，さらに成長したキミ達に会うことを楽しみにしている。それまで，みんな元気でな。さようなら…

マセマ代表　馬場敬之（けいし）