①の定積分は，

定数扱い

$$\int_0^1 (\boxed{3}t^2+\boxed{2x}\cdot t+\boxed{x^2})dt$$

$$=\left[3\cdot\frac{1}{3}t^3+2x\cdot\frac{1}{2}t^2+x^2\cdot t\right]_0^1$$

$$=[t^3+xt^2+x^2t]_0^1$$

1と0はtに代入する。

$$=1^3+x\cdot1^2+x^2\cdot1$$

$$-\cancel{(0^3+x\cdot0^2+x^2\cdot0)}$$

$$=1+x+x^2$$

$$=x^2+x+1$$ ← xの関数

②の定積分は，

$$\int_0^1 (3t^2+4t+4)dt$$

$$=\left[3\cdot\frac{1}{3}t^3+4\cdot\frac{1}{2}t^2+4t\right]_0^1$$

$$=[t^3+2t^2+4t]_0^1$$

$$=1^3+2\cdot1^2+4\cdot1$$

$$-\cancel{(0^3+2\cdot0^2+4\cdot0)}$$

$$=1+2+4$$

$$=7$$ ← 数値

どう？ ①と②を対比すると，まったく同様の計算をしていることが分かるね。tで積分するときは，まずtを変数とみて，xを定数扱いして，積分するんだね。でも，積分後tには，1と0という定数が代入されて引き算されるので，tは消えて，xだけの式となる。最終的に，これはxの2次関数だから，xは変数として動くと考えていいんだよ。この①の定積分，は，x王国とt王国の治乱興亡(ちらんこうぼう)の歴史(れきし)として説明することもできるんだよ。「かつて，x民族とt民族がいた。①はtでの積分なので，はじめt民族は変数として活発に活動した。つまり，t王国があったんだね。これに対して，x民族は定数扱いなので，t民族の支配の下，奴隷のようにじっと息をひそめて生活していた。しかし，さしものt王国の栄華も積分が終わると同時に絶頂期を過ぎ，辺境の民族1と0の侵入を受け，あっという間に亡んでしまう。t王国が滅亡した後，それまでじっとしていたx民族の活動が変数となって活発となり，最終的にはx王国(xの関数)が勃興することになる。」どう？数学も歴史風にアレンジして考えると覚えやすいだろう。

慣れてくると，①の定積分は最終的にはxの関数になるので，初めから$f(x)=\int_0^1(3t^2+2xt+x^2)dt$と書けるようになるよ。そして，これを計算した結果，$f(x)=x^2+x+1$ となるんだね。大丈夫だった？

では次，同じ被積分関数 $3t^2+2xt+x^2$ を x で，積分区間 $0 \leqq x \leqq 1$ で積分してみよう。つまり，次の定積分の計算だね。

$$\int_0^1 \underline{(3t^2+2xt+x^2)}\,\underline{dx} \quad \cdots\cdots ③$$

(i) x で積分

(ii) まず，x が変数で，t が定数扱い。

(iii) 積分後，x はなくなって，t の関数になる。

③は，最終的に x はなくなって，t の関数になるので，これを $g(t)$ とおいて，実際に求めてみると，

$$g(t)=\int_0^1 (\underline{3t^2}+\underline{2t}\cdot x+x^2)\,\underline{dx}$$

定数扱い　　x での積分

$$=\left[3t^2\cdot x+tx^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1$$

x 王国が亡んで，t 王国が成立する！

$$=3t^2\cdot 1+t\cdot 1^2+\frac{1}{3}\cdot 1^3-\left(\cancel{3t^2\cdot 0}+\cancel{t\cdot 0^2}+\cancel{\frac{1}{3}\cdot 0^3}\right)$$

$$=3t^2+t+\frac{1}{3}$$ となって，ナルホド t の 2 次関数になるんだね。

ではさらに，次の練習問題を解いてみよう。

練習問題 69	2 変数関数の積分	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^2 (2x^2-5xt-3t^2)\,dt$　　　(2) $\displaystyle\int_0^2 (2x^2-5xt-3t^2)\,dx$

(1) は，t の関数を t で積分して，その結果，t には 2 と 0 が代入されてなくなるので，最終的に x の関数 $f(x)$ になる。(2) は，x の関数を x で積分して，その結果，x には 2 と 0 が代入されてなくなるので，これは t の関数 $g(t)$ になるんだね。

(1) この積分結果は x の関数となるので，これを $f(x)$ とおくと，

$$f(x)=\int_0^2(\underbrace{2x^2}_{\text{まず，定数扱い}}-\underbrace{5x}_{}\cdot t-3t^2)\underbrace{dt}_{t\text{での積分}}$$

$$=\left[2x^2\cdot t-\frac{5}{2}x\cdot t^2-t^3\right]_0^2$$

t 王国が亡んで，
x 王国になる！

$$=2x^2\cdot 2-\frac{5}{2}x\cdot 2^2-2^3$$

$$-\left(\cancel{2x^2\cdot 0}-\cancel{\frac{5}{2}x\cdot 0^2}-\cancel{0^3}\right)$$

$$=4x^2-10x-8$$ となる。大丈夫だった？

(2) この積分結果は t の関数となるので，これを $g(t)$ とおくと，

$$g(t)=\int_0^2(2x^2-\underbrace{5t}_{\text{まず，定数扱い}}\cdot x-\underbrace{3t^2}_{})\underbrace{dx}_{x\text{での積分}}$$

$$=\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}t\cdot x^2-3t^2\cdot x\right]_0^2$$

x 王国が亡んで，
t 王国になるんだね。

$$=\frac{2}{3}\cdot 2^3-\frac{5}{2}t\cdot 2^2-3t^2\cdot 2$$

$$-\left(\cancel{\frac{2}{3}\cdot 0^3}-\cancel{\frac{5}{2}t\cdot 0^2}-\cancel{3t^2\cdot 0}\right)$$

$$=\frac{16}{3}-10t-6t^2$$

$$=-6t^2-10t+\frac{16}{3}$$ となって，答えだ！

どう？これで 2 変数関数の積分のやり方と，その意味についてもよく理解できただろう？今日の講義は，ちょっと歴史の講義っぽくなってしまったけれど，面白かった？この後，ヨ～ク復習して，シッカリマスターしておこう！では，次回まで，みんな元気でな。さようなら…。