演習問題 121　● エルミート行列の対角化(Ⅳ) ●

エルミート行列 $A_H=\begin{bmatrix} -1 & 1-2i \\ 1+2i & 3 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 U_U を用いて，$U_U^{-1}A_HU_U$ として対角化せよ。

ヒント！ 固有方程式 $|T|=|A_H-\lambda E|=0$ から，固有値 λ を求めて，それぞれの固有ベクトルを求めて，ユニタリ行列 U_U を作ればいいんだね。

解答＆解説

$\underbrace{Tx=0}_{(A_H-\lambda E)x=0\text{ のこと}}$ ……① ただし，$T=A_H-\lambda E=\begin{bmatrix} -1-\lambda & 1-2i \\ 1+2i & 3-\lambda \end{bmatrix}$ とおく。

固有方程式 $|T|=\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1-2i \\ 1+2i & 3-\lambda \end{vmatrix}=\underbrace{(-1-\lambda)(3-\lambda)}_{(\lambda+1)(\lambda-3)=\lambda^2-2\lambda-3}-\underbrace{(1-2i)(1+2i)}_{1^2-4i^2=5}=0$

を解いて，固有値 λ を求めると，$\lambda^2-2\lambda-8=0$ より，

$(\lambda-4)(\lambda+2)=0$　$\therefore \lambda=\underbrace{4}_{\lambda_1},\ \underbrace{-2}_{\lambda_2\text{とおく}}$ となる。

(i) $\lambda_1=4$ のとき，①を $T_1x_1=0$，そして，$x_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -5 & 1-2i \\ 1+2i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1-2i \\ 1+2i & -1 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1-2i & 1 \\ -5 & 1-2i \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} -1-2i & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\}r=1$$

$-(1+2i)\alpha_1+\alpha_2=0$

$\alpha_1=k_1$ とおくと，

$\alpha_2=(1+2i)k_1$

$\therefore x_1=k_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$　$(k_1\neq 0)$

ここで，$k_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと，

x_1 は正規化される。よって，

$x_1'=\begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|x_1'\|^2={}^t x_1'\overline{x}_1'$

$=[1\ \ 1+2i]\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}=1^2+(1+2i)(1-2i)$

$=1+1-4i^2=6$

$\therefore \|x_1'\|=\sqrt{6}$ より，$k_1=\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおけばいい

これを $\boldsymbol{u}_1$ とおくと，$\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+2i \end{bmatrix}$ となる。

(ii) $\lambda_2 = -2$ のとき，①を $T_2\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$　そして，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ 1+2i & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\} r=1$$

$\beta_1 + (1-2i)\beta_2 = 0$

$\beta_2 = k_2$ とおくと，

$\beta_1 = -(1-2i)k_2$

$\therefore\ \boldsymbol{x}_2 = k_2\begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$

ここで，$k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと，

$\boldsymbol{x}_2$ は正規化される。よって，

$\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|\boldsymbol{x}_2'\|^2 = [-1+2i\ \ 1]\begin{bmatrix} -1-2i \\ 1 \end{bmatrix}$

$= (-1+2i)(-1-2i)+1^2$

$= 1-4i^2+1 = 6$

$\therefore\ \|\boldsymbol{x}_2'\| = \sqrt{6}$ より，$k_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおけばいい

これを $\boldsymbol{u}_2$ とおくと，$\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1+2i \\ 1 \end{bmatrix}$ となる。

以上より，ユニタリ行列 U_U を

$U_U = [\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2] = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & -1+2i \\ 1+2i & 1 \end{bmatrix}$ とおくと，エルミート行列 A_H は，

$U_U^{-1}A_HU_U$ により対角化されて，$U_U^{-1}A_HU_U = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ となる。

……(答)

$U_U = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & -1+2i \\ 1+2i & 1 \end{bmatrix}$，$U_U^{-1} = {}^t\overline{U}_U = \begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ -1-2i & 1 \end{bmatrix}$ より，

$U_U^{-1}A_HU_U = \dfrac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1-2i \\ -1-2i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1-2i \\ 1+2i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1+2i \\ 1+2i & 1 \end{bmatrix}$ を

実際に計算して，これが $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ となることを，自分で確認しておこう。