補充問題 4	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

放物線 $L : y = x^2$ と円 $C : x^2 + (y-a)^2 = \frac{1}{2}$ (a：定数) が 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 a の値を求めよ。

(2) 放物線 L と円 C とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

ヒント！ (1) 放物線 L と円 C の方程式から x を消去して，y の 2 次方程式を作り，この判別式 D が $D=0$ となることから，定数 a の値を求めよう。(2) では，実際にグラフを描き，また面積公式も利用して解いていこう。

(1) $\begin{cases} \text{放物線 } L : y = x^2 & \cdots\cdots① \\ \text{円 } C : x^2 + (y-a)^2 = \frac{1}{2} & \cdots②\text{とおく。} \end{cases}$

①，②より，y を消去すると，x の 4 次方程式となって，複雑になる。ここでは，x を消去して，y の 2 次方程式にもち込むのがポイントになる。

①，②より，x を消去して，

$y + (y-a)^2 = \frac{1}{2}$

$y + y^2 - 2ay + a^2 = \frac{1}{2}$

$y^2 - (2a-1)y + a^2 - \frac{1}{2} = 0 \quad \cdots\cdots③$

となる。③の判別式を D とおくと，$D=0$ のとき，放物線 L と円 C とは 2 点で接する。よって，

$D = (2a-1)^2 - 4\left(a^2 - \frac{1}{2}\right)$

$\quad = \cancel{4a^2} - 4a + 1 - \cancel{4a^2} + 2$

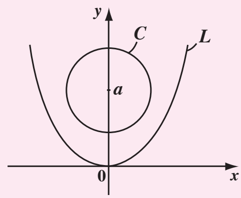
$\quad = \boxed{-4a + 3 = 0}$

$\therefore a = \frac{3}{4} \quad \cdots\cdots④ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{答})$

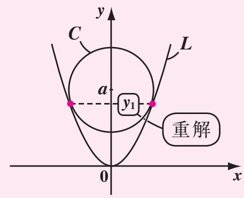
参考

判別式 D の値 (符号) と放物線 L と円 C の位置関係のイメージ

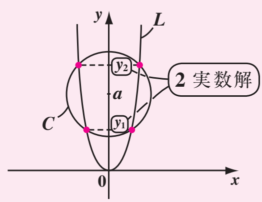
(i) $D < 0$ のとき，共有点なし



(ii) $D = 0$ のとき，2 接点をもつ



(iii) $D > 0$ のとき，4 交点をもつ



(2) $a=\dfrac{3}{4}$ ……④ を③に代入して

$$y^2-\left(\frac{3}{2}-1\right)y+\frac{9}{16}-\frac{1}{2}=0$$

$$y^2-\frac{1}{2}y+\frac{1}{16}=0$$

$$\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=0$$

これが $y=y_1$(重解)のことだ

$\therefore\ y=\dfrac{1}{4}$ (重解)……⑤　となる。

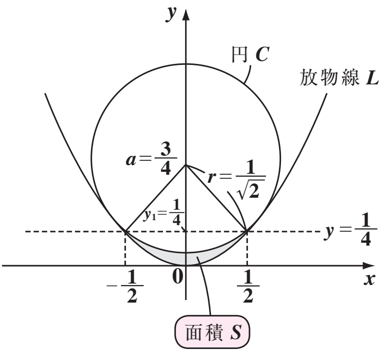
⑤を①に代入して

$\dfrac{1}{4}=x^2$ より　$x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2}$

となる。以上より，

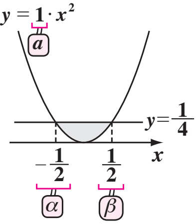
$$\begin{cases}\text{放物線 } L : y=x^2 & \cdots\cdots\text{①と}\\ \text{円 } C : x^2+\left(y-\dfrac{3}{4}\right)^2=\dfrac{1}{2} & \cdots\text{②の}\end{cases}$$

位置関係を図示すると下図のようになる。



よって，放物線 L と円 C とで囲まれる図形の面積を S とおくと，S は

(i) 放物線 $y=1\cdot x^2$ と直線 $y=\dfrac{1}{4}$ とで囲まれる図形の面積



$$\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}^3=\frac{1}{6}$$

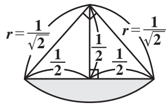
面積公式：$\dfrac{|a|}{6}(\beta-\alpha)^3$

から，

(ii) 円 C の $\dfrac{1}{4}$ 円の面積

$$\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot r^2=\frac{1}{4}\pi\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

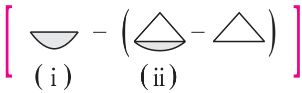
$=\dfrac{\pi}{8}$ から，直角二等辺三角形の面積



$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ を引いたもの，

を引いて求められる。すなわち，

$$S=\frac{1}{6}-\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)$$



$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{\pi}{8}$$

$$=\frac{5}{12}-\frac{\pi}{8}=\frac{10-3\pi}{24}$$ である。

………(答)