演習問題 141　● 曲面の面積 (Ⅲ) ●

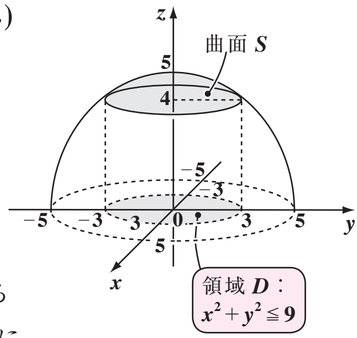
曲面 $z = \sqrt{25-x^2-y^2}$　$(z \geqq 4)$ の面積 S を求めよ。

ヒント！ 曲面の面積 S は，公式 $S = \iint_D \sqrt{f_x{}^2+f_y{}^2+1}\,dxdy$　$(x^2+y^2 \leqq 9)$ で計算することができる。積分の際，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，極座標 (r, θ) に変数変換して解くことがポイントになるんだね。

解答＆解説

曲面 $z = f(x, y) = \sqrt{25-x^2-y^2}$ ……①　$(z \geqq 4)$

①より，$z^2 = 25-x^2-y^2$，$x^2+y^2+z^2 = 25$
よって，これは，原点 O を中心とする半径 5 の上半球面を表す。さらに，$z \geqq 4$ の条件から，$\sqrt{25-x^2-y^2} \geqq 4$
$25-x^2-y^2 \geqq 16$ より，領域 D は，$x^2+y^2 \leqq 9$ の範囲の図形を表す。



は，右図に示すように，原点 O を中心とする半径 5 の上半球面の内，領域 D：$x^2+y^2 \leqq 9$ に対応する曲面を表す。この曲面の面積を求める。

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}(25-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \quad \cdots\cdots ②$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}(25-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}} \quad \cdots\cdots ③$$ より，

②，③を曲面 S を求める公式に代入すると，

$$S = \iint_D \underline{\sqrt{f_x{}^2+f_y{}^2+1}}\,dxdy = \iint_D \sqrt{\frac{25}{25-x^2-y^2}}\,dxdy$$

$$\left(-\frac{x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(-\frac{y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}\right)^2 + 1 = \frac{\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+25-\cancel{x^2}-\cancel{y^2}}{25-x^2-y^2} = \frac{25}{25-x^2-y^2}$$

$$\therefore S = 5\iint_D (25-x^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\,dxdy \quad \cdots\cdots ④$$ となる。

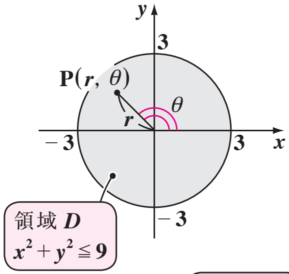
ここで，座標 $(x,\ y)$ を

$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$ とおいて，

極座標 $(r,\ \theta)$ に変換すると，

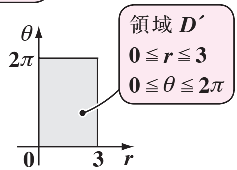
・$(x,\ y)$ の領域 D：$x^2+y^2 \leqq 9$ は，

・$(r,\ \theta)$ の領域 D'：$\begin{cases} 0 \leqq r \leqq 3 \\ 0 \leqq \theta \leqq 2\pi \end{cases}$



に変換される。また，$x^2+y^2=r^2$ であり，

$dxdy = \underbrace{|J|}_{r}drd\theta = rdrd\theta$　となる。



以上より，求める曲面 $z=f(x,\ y)$ $(z \geqq 4)$

の面積 S は，④を置換積分することにより次のように求められる。

$$S = 5\iint_D \{25-\underbrace{(x^2+y^2)}_{r^2}\}^{-\frac{1}{2}}\underbrace{dxdy}_{rdrd\theta} = 5\iint_{D'}(25-r^2)^{-\frac{1}{2}}rdrd\theta$$

$$= 5\int_0^{2\pi}d\theta\underbrace{\int_0^3 r(25-r^2)^{-\frac{1}{2}}dr}_{\left[-(25-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3}$$

合成関数の微分：$\{(25-r^2)^{\frac{1}{2}}\}' = \dfrac{1}{2}(25-r^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2r) = -r(25-r^2)^{-\frac{1}{2}}$ を利用した

$$= 5\underbrace{\left[\theta\right]_0^{2\pi}}_{2\pi}\cdot\underbrace{\left[-(25-r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3}_{-\sqrt{25-9}+\sqrt{25}=5-4=1}$$

$\therefore\ S = 5\times2\pi\times1 = 10\pi$　である。……………………………………………(答)