● 方べきの定理とメネラウスの定理の融合問題をもう1題解こう！

方べきの定理とメネラウスの定理の **2** つを利用する問題も，次の例題で解いてみよう。公式や定理は使って覚えていくことが大切なんだね。

演習問題 63	制限時間 6 分	難易度 ★★	CHECK1	CHECK2	CHECK3

△**ABC** において，$AB=3$，$BC=7$，$CA=5$ とする。
辺 **AC** 上に点 **D** を $AD=3$ となるようにとり，△**ABD** の外接円と直線 **BC** の交点で，**B** と異なるものを **E** とする。このとき，

$BC\cdot CE=\boxed{アイ}$ であるから，$CE=\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

直線 **AB** と直線 **DE** の交点を **F** とするとき，$\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$ であり，

$AF=\dfrac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}}$ である。

ヒント！ △**ABC** と，△**ABD** の外接円の図を描けば方べきの定理が利用できることに気付くはずだ。次に△**ABC** と△**FBE** の形から，$\dfrac{BF}{AF}$ を求めるのに，メネラウスの定理を使うことに気付けばいいんだね。頑張ろう！

解答＆解説

右図に，$AB=3$，$BC=7$，$CA=5$ の△**ABC** と，△**ABD** の外接円を図 **1** に示す。この円と辺 **BC** との交点を **E** とおく。

$CE=x$ とおき，方べきの定理を用いると，

$BC\cdot CE=\underbrace{AC}_{5}\cdot\underbrace{CD}_{2}=5\times2=10$

$\therefore\ \underbrace{BC}_{7}\cdot\underbrace{CE}_{x}=10$ ……………………①………(答)(アイ)

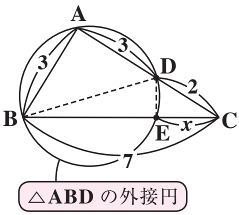
①に $BC=7$ を代入すると，

$x=CE=\dfrac{10}{7}$ ……………………②となる。……(答)

(ウエ，オ)

ココがポイント

図 **1**



$\left(\begin{array}{l}\text{方べきの定理}\\ 2\times5=x\times7\end{array}\right)$

$BC = 7$ より，

$$BE = BC - CE = 7 - \frac{10}{7} = \frac{49-10}{7}$$

$\therefore\ BE = \dfrac{39}{7}$ である。

直線 AB と直線 DE の交点を F とおく。

図 2 に示すように，$AF = y$ とおいて，これを求める。

図 2 の形から，図 3 に示すようなメネラウスの定理 $\left(\dfrac{②}{①} \times \dfrac{④}{③} \times \dfrac{⑥}{⑤} = 1\right)$ が使えることに気付けばいいんだね。よって，

$$\frac{BF}{AF} \times \frac{\frac{10}{\cancel{7}}}{\frac{39}{\cancel{7}}} \times \frac{3}{2} = 1$$

$$\frac{BF}{AF} = 1 \times \frac{2}{\cancel{3}} \times \frac{\overset{13}{\cancel{39}}}{10} = \frac{13}{5}$$ …………③となる。

……(答)(カキ，ク)

ここで，$AF = y$，$BF = y + 3$ を③に代入して，

$$\frac{y+3}{y} = \frac{13}{5} \qquad 5(y+3) = 13y$$

$$5y + 15 = 13y \qquad 8y = 15$$

$\therefore\ y = AF = \dfrac{15}{8}$ である。……………(答)(ケコ，サ)

図 2

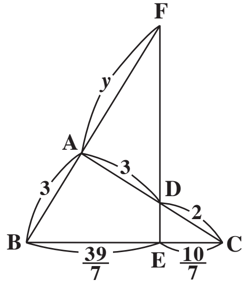
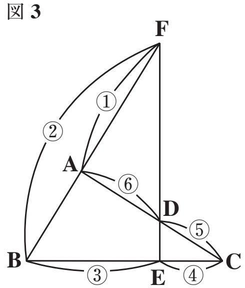


図 3



どう？これで方べきの定理とメネラウスの定理の融合問題にもかなり自信が付いたでしょう？後は，自分で納得がいくまで何度でも反復練習しておくことだね。