補充問題 5	難易度 ★★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

2 曲線 C_1 : $y=4x^3+ax^2+bx+3$, C_2 : $y=cx^2$ (a, b, c : 定数)が，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ で接する，すなわち，この点において共通接線をもつものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 定数 a, b, c の値を求めよ。

(2) 2 曲線 C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 S を求めよ。(芝浦工大＊)

ヒント！ (1) C_1 : $y=f(x)$, C_2 : $y=g(x)$ とおくと，2 曲線の共接条件から，(i) $f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$, (ii) $f'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right)$ が成り立つんだね。(2) C_1 と C_2 によって囲まれる図形の面積 S は，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，3 次関数 $y=h(x)$ と x 軸(接線)とで囲まれる図形の面積と等しいので，面積公式が利用できるんだね。

(1) $\begin{cases} \text{曲線 } C_1 : y=f(x) \\ \qquad =4x^3+ax^2+bx+3 \cdots\cdots ① \\ \text{曲線 } C_2 : y=g(x)=cx^2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

とおく。①，②を x で微分すると，

$\begin{cases} f'(x)=12x^2+2ax+b \cdots\cdots ①' \\ g'(x)=2cx \cdots\cdots ②' \end{cases}$

となる。

ここで，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ で接するので，2 曲線の共接条件より，

$\begin{cases} \text{(i)}\ f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4} \cdots\cdots ③ \\ \text{かつ} \\ \text{(ii)}\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=g'\left(\frac{1}{2}\right) \cdots\cdots ④ \end{cases}$

が成り立つ。

(i) ③より，

$4\cdot\frac{1}{8}+a\cdot\frac{1}{4}+b\cdot\frac{1}{2}+3=c\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

よって，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+3=\frac{1}{4}$ より，

$\begin{cases} a+2b=-13 \cdots\cdots ⑤ \\ c=1 \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$ と が導ける。

(ii) ④より，

$12\cdot\frac{1}{4}+2a\cdot\frac{1}{2}+b=2c\cdot\frac{1}{2}$ より，

$a+b=\underbrace{c}_{1\,(⑥より)}-3=-2 \cdots\cdots ⑦$ となる。

⑤－⑦より，$b=-11$

これを⑦に代入して，$a-11=-2$

$\therefore\ a=9$

以上より，$a=9$, $b=-11$, $c=1$ である。……(答)

(2)(1) の結果より，

$$\begin{cases} C_1 : y=f(x)=4x^3+9x^2-11x+3 \cdots ⑧ \\ C_2 : y=g(x)=x^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨ \end{cases}$$

となる。⑧，⑨より，y を消去して，

$4x^3+9x^2-11x+3=x^2$

$4x^3+8x^2-11x+3=0$ ……⑩

2 曲線 C_1 と C_2 は，$x=\frac{1}{2}$ のとき接するので，⑩は $x=\frac{1}{2}$ を重解にもつはずである。よって，組立て除法を用いて⑩の左辺を因数分解すると，

組立て除法

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 4, & 8, & -11, & 3 \\ & & 2 & 5 & -3 \\ \hline & 4 & 10 & -6 & (0) \end{array}$$

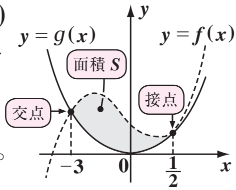
$$\begin{array}{r|rrr} \frac{1}{2} & & 2 & 6 \\ \hline & 4 & 12 & (0) \end{array}$$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\cdot(4x+12)=0$

$(2x-1)^2(x+3)=0$ となる。

$\therefore\ x=-3,\ \frac{1}{2}$（重解）となる。

よって，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



ここで，この 2 曲線によって囲まれる図形の面積 S は次式で求められる。

$$S=\int_{-3}^{\frac{1}{2}}\underbrace{\{f(x)-g(x)\}}_{\text{これを，}h(x)\text{とおく。}}dx \cdots\cdots ⑪$$

ここで，新たな関数として，

$y=h(x)=f(x)-g(x)$

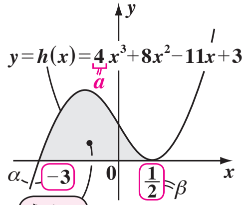
$=4x^3+8x^2-11x+3$ 　この右辺は，⑩の左辺と同じ

$=(2x+1)^2(x+3)$

とおくと，$h(x)=0$ の解が，

$x=-3,\ \frac{1}{2}$（重解）となるので，

$y=h(x)$ は，x 軸と $x=-3$ で交わり，$x=\frac{1}{2}$ で接する 3 次関数である。よって，このグラフの概形は右図のようになる。



ゆえに，求める面積 S は，

求める面積 S

面積公式 $S=\frac{|a|}{12}(\beta-\alpha)^4$

$S=\int_{-3}^{\frac{1}{2}}h(x)\,dx$

$=\int_{-3}^{\frac{1}{2}}(4x^3+8x^2-11x+3)\,dx$

$=\left[x^4+\frac{8}{3}x^3-\frac{11}{2}x^2+3x\right]_{-3}^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{4}{12}\left\{\frac{1}{2}-(-3)\right\}^4$

$=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^4=\frac{7^4}{3\cdot 2^4}$

$=\frac{2401}{48}$ である。……………(答)

$7^4=49^2=(50-1)^2=2500-100+1$