ではここで，成分表示の平面ベクトルの基本問題を解いてみよう。

演習問題 52	制限時間 5 分	難易度 ★	CHECK1	CHECK2	CHECK3

原点 O を中心とする半径 2 の円周上に 4 点 $A(2,0)$，$B(0,2)$，$C(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，$D(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$ がある。線分 AC の中点を P，線分 BD の中点を Q とおくと，$P\left(\dfrac{\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{2},\ \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{2}\right)$ であり，$Q\left(\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{2},\ \dfrac{\boxed{\text{カ}}-\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{2}\right)$ である。また，線分 PQ の長さは，$PQ=\sqrt{\boxed{\text{ク}}-\boxed{\text{ケ}}\sqrt{\boxed{\text{コ}}}}$ である。次に，直線 PQ と x 軸との交点を R とおくと，$R\left(\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}},\ 0\right)$ である。

ヒント！ $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})$ より，点P，Q の座標を求め線分PQ の長さを求めよう。次に，$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ}$ (t：未知数) とおいて，$\overrightarrow{OR}$の y 成分が 0 となることから，t の値を決定して，$\overrightarrow{OR}$を求めればいいんだね。

解答＆解説

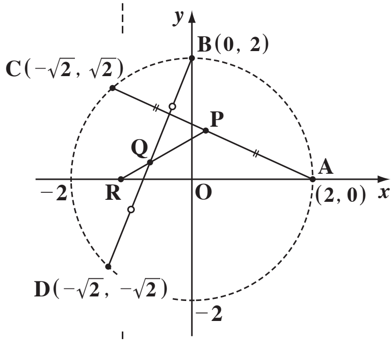
ココがポイント

O を中心とする半径 2 の円周上の 4 点 $A(2,\ 0)$，$B(0,\ 2)$，$C(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，$D(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$ を示す。よって，

$\overrightarrow{OA}=(2,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=(0,\ 2)$

$\overrightarrow{OC}=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，$\overrightarrow{OD}=(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$

となる。



・線分 AC の中点 P について，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC})$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(2,\ 0)+(-\sqrt{2},\ \sqrt{2})\right\}$$
$$=\frac{1}{2}(2-\sqrt{2},\ \sqrt{2})=\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ \cdots\cdots①$$

$\therefore$ 点 $P\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ である。……(答)

(ア，イ，ウ)

・線分 BD の中点 Q について

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{2}\{(0,\ 2)+(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})\}$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\ \cdots\cdots ②$$

$$\therefore 点\ Q\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\ \cdots\cdots(答)(エ,\ オ,\ カ,\ キ)$$

・①, ②より,

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$$

$$=\left(-\frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{2}},\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)-\left(\frac{2-\cancel{\sqrt{2}}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=(-1,\ 1-\sqrt{2})\ \cdots\cdots ③\quad となる。$$

⇦ まわり道の原理
$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

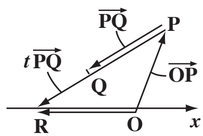
$$\therefore PQ=|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{\underbrace{(-1)^2+(1-\sqrt{2})^2}_{1+1-2\sqrt{2}+2=4-2\sqrt{2}}}$$

⇦ $\overrightarrow{PQ}=(x_1,\ y_1)$ のとき,
$|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$

$$=\sqrt{4-2\sqrt{2}}\quad である。\cdots\cdots\cdots(答)(ク,\ ケ,\ コ)$$

・直線 PQ と x 軸との交点を R とおくと, ①と③より,

⇦ まわり道の原理



$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{PQ}\quad (t:実数定数)$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)+t(-1,\ 1-\sqrt{2})$$

$$=\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-t,\ \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}+t(1-\sqrt{2})}_{0\ (\because 点\ R\ の\ y\ 座標は\ 0)}\right)\cdots ④\ となる。$$

ここで, 点 R の y 座標は 0 より,

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+t(1-\sqrt{2})=0\quad \therefore t=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

⇦ $(\sqrt{2}-1)t=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$t=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}-1)}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)}{2(2-1)}$
$=\frac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$

これを④に代入して,

$$\overrightarrow{OR}=\left(\cancel{1}-\frac{\sqrt{2}}{2}-\left(\cancel{1}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ 0\right)=(-\sqrt{2},\ 0)$$

$\therefore$ 点 R$(-\sqrt{2},\ 0)$ である。$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(答)(サ, シ)