微分方程式(Ⅱ)

演習問題 92	難易度 ★★	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

次の微分方程式を各条件の下で解き，そのグラフの概形を描け。

(1) $y' = -\dfrac{4x}{y}$ ……① ($y \neq 0$，条件：$x = 0$ のとき，$y = 2$)

(2) $y' = \dfrac{x-1}{2y}$ ……② ($y \neq 0$，条件：$x = 1$ のとき，$y = 1$)

ヒント！ (1), (2) いずれも，変数分離形 $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ の形で解いていこう。これらは，いずれも条件が付いているので，積分定数 C の値を決定することができる。(1) は，たて長だ円を表し，(2) は上下の双曲線を表すことが，導けるはずだ。頑張ろう！

解答＆解説

(1) ①より，$\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4x}{y}$ $(y \neq 0)$

よって，$y\,dy = -4x\,dx$ より，$\int y\,dy = -\int 4x\,dx$

$\dfrac{1}{2}y^2 = -2x^2 + C_1$ (C_1：定数) となる。

この両辺を 2 で割って，まとめると，

$x^2 + \dfrac{y^2}{4} = C$ ……③ $\left(C = \dfrac{C_1}{2},\ y \neq 0\right)$ となる。

ここで，条件：$x = 0$ のとき，$y = 2$ より，

これらを③に代入して，

$0^2 + \dfrac{2^2}{4} = C$ $\therefore C = 1$

これを③に代入すると，①の微分方程式の解は，

$\dfrac{x^2}{1^2} + \dfrac{y^2}{2^2} = 1$ ……④ $(y \neq 0)$ である。……(答)

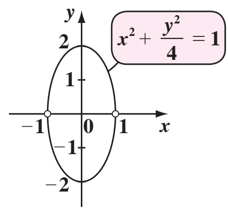
④は，たて長だ円の方程式 (ただし，2 点 $(1,\ 0)$ $(-1,\ 0)$ を除く) であり，このグラフの概形を示すと右図のようになる。……………………(答)

ココがポイント

⇦ 変数分離形 $\int f(y)dy = \int g(x)dx$ にもち込んだ。

⇦ だ円の式の形が出てきた。
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ で $b > a > 0$ のとき，たて長だ円になる。

⇦ ④のグラフの概形



(2) ②より，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-1}{2y}$ $(y \neq 0)$ よって，

$2y\,dy = (x-1)dx$ より，$\displaystyle\int 2y\,dy = \int (x-1)dx$

⇦ 変数分離形 $\displaystyle\int f(y)dy = \int g(x)dx$

$y^2 = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 + C_1$ (C_1：定数) となる。

これをまとめると，

$\dfrac{(x-1)^2}{2} - y^2 = C$ ……⑤ $(C = -C_1)$ となる。

⇦ 双曲線の式の形が出てきた

ここで，条件：$x = 1$ のとき，$y = 1$ より，

これらを⑤に代入して，

$\cancel{\dfrac{0^2}{2}} - 1^2 = C$ $\therefore C = -1$

これを⑤に代入すると，②の微分方程式の解は，

$\dfrac{(x-1)^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{y^2}{1^2} = -1$ ……⑥ である。……(答)

⇦ ⑥式では，$y = 0$ になり得ないので，$y \neq 0$ の条件は不要

⑥は，上下の双曲線 $\dfrac{x^2}{(\sqrt{2})^2} - \dfrac{y^2}{1^2} = -1$ $\left(\text{漸近線 } y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}x\right)$ を x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

よって，⑥のグラフの概形は右図のようになる。

…………(答)