それではここで，単純な $\mathbf{2}$ 変数関数のラグランジュの未定乗数法を離れて，この後の気体分子の速度分布を求める際に出てくる多変数関数についてのラグランジュの未定乗数法の利用法を具体的に紹介しておこう。

x_1，x_2，…，x_n の n 個の独立変数をもつ n 変数関数

$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ……① が，

$\mathbf{2}$ つの制約条件

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 & \cdots\cdots② \\ g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$ の下で，

これを点の座標とみる。

ある点で物理的に考えて，最大となることが分かっている。

このとき，$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を最大にする $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の値の組を求めるために，ラグランジュの未定乗数法を利用しよう。

まず，①，②，③から，新たな関数 h を次のように作る。

$$h = f + \alpha g_1 + \beta g_2 \quad \cdots\cdots④$$

$h = h(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と，h も f，g_1，g_2 同様に n 変数関数だ。

この未定乗数 α，β は，それぞれ $-\alpha$，$-\beta$ や，$2\alpha-1$，$\beta-3$ など…なんでもかまわない。後で決定すればいいだけだからね。

そして，④を n 個の独立変数 x_1，x_2，…，x_n でそれぞれ偏微分したものを $\mathbf{0}$ とおいて，n 個の方程式を作る。

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial x_2} = 0, \quad \cdots\cdots, \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} = 0$$

これらの方程式は，まとめて $\dfrac{\partial h}{\partial x_i} = 0$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ と表してもいい。

これらの方程式と②，③を連立させて，x_1，x_2，…，x_n の値と未定乗数 α，β の値を求めればいいんだね。

数学的には，ラグランジュの未定乗数法で求まる x_1，x_2，…，x_n の値は，あくまでも②と③の制約条件の下で，$z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が極値をとる可能性のある点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を求めているに過ぎない。だけど，物理的に極大かつ最大となる点が存在することが分かっていれば，その点で①が最大になると考えることができるんだね。この解法の流れや考え方は非常に重要だから，シッカリ頭に入れておこう。

例題 30 次の最小値や最大値の問題を，ラグランジュの未定乗数法を用いて解いてみよう。

(1) $g(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + 1 = 0$ の制約条件の下，
$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$ の最小値を求めよ。

(2) $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{3}{2} = 0 \quad (x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$
の制約条件の下，$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3$ の最大値を求めよ。

(1) $g(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + 1 = 0$ ……① の条件の下，
$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$ ……② の最小値をラグランジュの未定乗数法を用いて求める。①，②と未定乗数 α を用いて新たな関数 $h(x_1, x_2)$ を次のように定義する。

$$h(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2 + \alpha(2x_1 - x_2 + 1) \quad \cdots\cdots③$$

③を x_1 と x_2 で偏微分して，0 とおくと，

$$h_{x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_1} = -2x_1 + 2\alpha = 0 \quad \therefore x_1 = \alpha \quad \cdots\cdots④$$

$$h_{x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 2x_2 - \alpha = 0 \quad \therefore x_2 = \frac{\alpha}{2} \quad \cdots\cdots\cdots⑤$$

$g(x_1, x_2) = 0$ のとき，$f(x_1, x_2)$ の最小値は，$h = f + \alpha g$ とおいて $h_{x_1} = 0$，$h_{x_2} = 0$ と $g = 0$（条件式）から求める。

④，⑤を①に代入して，

$$2\cdot\alpha - \frac{\alpha}{2} + 1 = 0, \quad \frac{3}{2}\alpha = -1 \quad \therefore \alpha = -\frac{2}{3}$$

これを，④，⑤に代入して，$x_1 = -\frac{2}{3}$，$x_2 = -\frac{1}{3}$

このとき，$f(x_1, x_2)$ は最小値をとるので，②より，

最小値 $f(x_1, x_2) = f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{4}{9} + \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$

となる。

もちろんこれは，①より，$x_2 = 2x_1 + 1$ となるので，これを②に代入すれば，$f(x_1, x_2) = -x_1^2 + (2x_1 + 1)^2 = 3x_1^2 + 4x_1 + 1$ となって，x_1 の 2 次関数（下に凸の放物線）となるので，これから，最小値を求めても，同じ結果になる。

(2) $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \dfrac{3}{2} = 0$ ……⑥　$(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0)$

の条件の下，$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + x_3$ ……⑦ の最大値をラグランジュの未定乗数法を用いて求める。新たな関数 $h(x_1, x_2, x_3)$ を次のように定義する。

$$h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3) - \alpha g(x_1, x_2, x_3)$$

$$= x_1 + 2x_2 + x_3 - \alpha\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{3}{2}\right) \cdots ⑧\ (\alpha：未定乗数)$$

$f+\alpha g$ とするよりも，$f-\alpha g$ とおいた方が，後の計算で都合がいいんだね。

⑧を x_1, x_2, x_3 で偏微分して，0 とおくと，

$$h_{x_1} = \frac{\partial h}{\partial x_1} = 1 - 2\alpha x_1 = 0 \text{ より，} x_1 = \frac{1}{2\alpha} \quad \cdots\cdots ⑨$$

$$h_{x_2} = \frac{\partial h}{\partial x_2} = 2 - 2\alpha x_2 = 0 \text{ より，} x_2 = \frac{1}{\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots ⑩$$

$$h_{x_3} = \frac{\partial h}{\partial x_3} = 1 - 2\alpha x_3 = 0 \text{ より，} x_3 = \frac{1}{2\alpha} \quad \cdots\cdots ⑪$$

$(x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$ より，$\alpha > 0)$

⑨，⑩，⑪を⑥に代入して，

$$\left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{1}{2\alpha}\right)^2 - \frac{3}{2} = 0 \text{ より，}$$

$$\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{3}{2} \qquad \frac{6}{4\alpha^2} = \frac{3}{2} \qquad \alpha^2 = \frac{6}{4} \times \frac{2}{3} = 1$$

ここで，$\alpha > 0$ より，$\alpha = 1$

よって，⑨，⑩，⑪より，

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdots\cdots ⑨' \quad x_2 = 1 \cdots\cdots ⑩' \quad x_3 = \frac{1}{2} \cdots\cdots ⑪'$$ となる。

このとき，$f(x_1, x_2, x_3)$ は最大値となる。よって，

$$最大値\ f(x_1, x_2, x_3) = f\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} + 2 \times 1 + \frac{1}{2} = 3$$ となるんだね。

以上でラグランジュの未定乗数法にも慣れたでしょう？