(ⅰ) 期待値 $m = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} x\cdot 0\,dx}}_{0} + \int_0^2 x\cdot\frac{1}{2}x\,dx + \underbrace{\cancel{\int_2^{\infty} x\cdot 0\,dx}}_{0}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{6}\left[x^3\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{6}(2^3 - \cancel{0^3}) = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$ となる。

(ⅱ) 分散 $\sigma^2 = V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx} - \underbrace{m^2}_{\left(\frac{4}{3}\right)^2}$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx}_{\cancel{\int_{-\infty}^{0} x^2\cdot 0\,dx} + \int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}x\,dx + \cancel{\int_2^{\infty} x^2\cdot 0\,dx}} - \frac{16}{9}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x^3 dx - \frac{16}{9} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 - \frac{16}{9}$$

$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ を使った。

$$= \frac{1}{8}\left[x^4\right]_0^2 - \frac{16}{9} = \frac{1}{8}(2^4 - \cancel{0^4}) - \frac{16}{9}$$

$$= \frac{16}{8} - \frac{16}{9} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{18-16}{9} = \frac{2}{9}$$ となる。

(ⅲ) 標準偏差 $\sigma = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ となって，答えだ！

それでは，もう 1 題，連続型確率分布の問題を解いておこう。

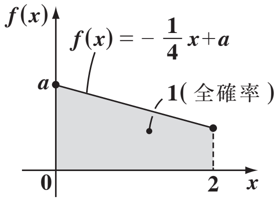
練習問題 48	連続型確率変数の $E(X)$，$V(X)$，$D(X)$	CHECK 1	CHECK 2	CHECK 3

連続型の確率変数 X が，確率密度 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + a & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (x < 0,\ 2 < x) \end{cases}$

の確率分布に従うとき，a の値を求めよ。また，変数 X の期待値 $m = E(X)$，分散 $\sigma^2 = V(X)$，標準偏差 $\sigma = D(X)$ を求めよ。

まず，$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$(全確率) の条件から，$a$ の値を求めよう。そして，期待値，分散，標準偏差は，それぞれの公式：$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$, $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \{E(X)\}^2$, $D(X) = \sqrt{V(X)}$ から求めればいいんだね。頑張ろう！

確率密度 $f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x + a & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (x < 0,\ 2 < x) \end{cases}$



は，条件 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ (全確率) をみたすので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dx}}_{0} + \int_0^2 \left(-\frac{1}{4}x + a\right)dx + \underbrace{\cancel{\int_2^{\infty} 0 \cdot dx}}_{0}$$

$$= \left[-\frac{1}{8}x^2 + ax\right]_0^2 = -\frac{1}{8} \cdot 2^2 + a \cdot 2 - 0 = \boxed{2a - \frac{1}{2} = 1} \text{(全確率)}$$

$\therefore a = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{3}{4}$ 　となる。

これから，

$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4} & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (x < 0,\ 2 < x) \end{cases}$

となる。

よって，この確率密度 $f(x)$ に従う確率変数 X の期待値，分散，標準偏差を求めると，

(i) 期待値 $m = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\ dx}}_{0} + \int_0^2 x\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)dx + \underbrace{\cancel{\int_2^{\infty} x \cdot 0\ dx}}_{0}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 (-x^2 + 3x)dx = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 0\right) = \frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3} + 6\right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{18 - 8}{3} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$ 　となるんだね。では次，

(ii) 分散 $\sigma^2 = V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx} - \underbrace{m^2}_{\{E(X)\}^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2}$

$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4} & (0 \leqq x \leqq 2) \\ 0 & (x < 0,\ 2 < x) \end{cases}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \frac{25}{36}$$

$$= \underbrace{\cancel{\int_{-\infty}^{0} x^2 \cdot 0\ dx}}_{0} + \int_0^2 x^2\left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}\right)dx + \underbrace{\cancel{\int_{2}^{\infty} x^2 \cdot 0\ dx}}_{0} - \frac{25}{36}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 (-x^3 + 3x^2)dx - \frac{25}{36}$$

$\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C$ を使った

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{4}x^4 + x^3\right]_0^2 - \frac{25}{36}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 2^3 - 0\right) - \frac{25}{36}$$

$$= \frac{1}{4}(-4+8) - \frac{25}{36} = 1 - \frac{25}{36}$$

$= \frac{36-25}{36} = \frac{11}{36}$ となって，分散も求まった！　そして，

(iii) 標準偏差 $\sigma = D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{11}{36}} = \frac{\sqrt{11}}{6}$ となるんだね。大丈夫？

これで，連続型確率分布の計算にもずい分慣れたと思う。

● 新たな確率変数の期待値，分散も求めよう！

離散型の変数のときと同様に，連続型の確率変数 X についても，これを使って新たな確率変数 Y を，$Y = aX + b$　(a，b：実数定数) と定義したとき，Y の期待値 $E(Y)$，分散 $V(Y)$，そして標準偏差 $D(Y)$ を次のように求めることができる。これらの公式も，離散型のときのものとまったく同様だから，スグにマスターできると思うよ。