一般に，ハミルトニアン $\boldsymbol{H}$ は時刻 $\boldsymbol{t}$ を含まない場合が多いので，ここで，時刻 $\boldsymbol{t}$ を含まない波動関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ の方程式も求めてみよう。

波動関数 $\Psi(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{t})$ が，次のように変数分離形で表されるものとしよう。

$$\underbrace{\Psi(x,\ t)}_{t\text{を含む波動関数}} = \underbrace{\psi(x)}_{t\text{を含まない波動関数}}\overset{\text{タウ}}{\tau}(t) \quad \cdots\cdots\cdots ⑨$$

これは，偏微分方程式を解く際に“変数分離法”と呼ばれる基本的解法のパターンの **1** つだ。

⑨を $(*a_1)$ に代入して，

$$i\hbar\psi \underbrace{\dot{\tau}}_{\frac{d\tau}{dt}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\underbrace{\psi''}_{\frac{d^2\psi}{dx^2}}\tau + U\psi\tau$$

$\because\ \dot{\Psi} = \psi\cdot\dot{\tau},\ \Psi'' = \psi''\cdot\tau$

この両辺を $\psi\tau$ で割ると，次のように左辺は $\boldsymbol{t}$ のみの，そして右辺は $\boldsymbol{x}$ のみの式となるので，これが恒等的に成り立つためには，これはある定数に等しくなければならない。ここで，その定数を $\boldsymbol{E}(>\boldsymbol{0})$ とおくと，

$$\underbrace{i\hbar\frac{\dot{\tau}}{\tau}}_{(\text{i})\,t\text{のみの式}} = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\psi''}{\psi} + U}_{(\text{ii})\,x\text{のみの式}} = \underbrace{E}_{\text{力学的エネルギーのこと}} \quad (\text{正の定数})\text{となる。}$$

ここで，エネルギー $\boldsymbol{E}$ が定数として現れる。

(ⅰ) まず，$i\hbar\dfrac{\dot{\tau}}{\tau} = E$ より，$\dot{\tau} = \dfrac{E}{i\hbar}\tau = -\dfrac{i^2E}{i\hbar}\tau = -i\dfrac{E}{\hbar}\tau$

$\dfrac{d\tau}{dt} = -i\dfrac{E}{\hbar}\tau$ となり，これをみたす $\tau(\boldsymbol{t})$ は，

$$\tau(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

定数係数 $\boldsymbol{C}$ は，$\psi(\boldsymbol{x})$ の方につけることにして，この係数は **1** とした。

$\dfrac{df}{dt} = \alpha f$ のとき，一般解は $f = Ce^{\alpha t}$ となるからね。

となるんだね。では次の方程式について考えてみよう。

(ⅱ) $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\psi''}{\psi} + U = E$ より，両辺に $\psi(\boldsymbol{x})$ をかけると，

時刻 $\boldsymbol{t}$ を含まない波動関数 $\psi(\boldsymbol{x})$ のシュレーディンガーの波動方程式

$$E\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi \quad \cdots\cdots\cdots (*a_2)$$

が導ける。

この $(*a_2)$ は，$\Psi(x,\ t) = \psi(x)e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ とおいて，

$i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U\Psi$ ………$(*a_1)$ に代入することによっても

求められる。実際に実行してみると，

$$i\hbar\psi\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\right)}_{\boxed{-i\frac{E}{\hbar}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}} = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-i\frac{E}{\hbar}t}\frac{d^2\psi}{dx^2} + U\psi e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$$

$$E\psi\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}\cdot\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}} + U\psi\cancel{e^{-i\frac{E}{\hbar}t}}$$

よって，両辺を $e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ で割ると，$(*a_2)$ が導けるんだね。

このように，$\Psi(x,t) = \psi(x)\cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ で表されるとき，これは，エネルギーが一定の値 E（定数）をとる定常状態と考えることができる。

そして，単にシュレーディンガー方程式と呼ぶ場合，$(*a_2)$ を指すことが多いことも知っておくといい。

それでは，Ψ と ψ についてのシュレーディンガー方程式をもう **1** 度ここにまとめておこう。

(Ⅰ) 時刻 t を含む波動関数 $\Psi(x,\ t)$ の波動方程式は，

$i\hbar\dfrac{\partial\Psi}{\partial t} = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + U(x)\Psi$ ………$(*a_1)$ で表され，

(Ⅱ) $(*a_1)$ の解の **1** つとして，$\Psi(x,\ t) = \psi(x)\cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t}$ と表され，時刻 t を含まない波動関数 $\psi(x)$ の波動方程式は，

$E\psi = -\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\psi}{dx^2} + U(x)\psi$ ………$(*a_2)$ で表されるんだね。

そして，様々なポテンシャル $U(x)$ や境界条件の下で，$(*a_1)$ や $(*a_2)$ の波動方程式を解くことにより，波動関数 $\Psi(x,\ t)$ や $\psi(x)$ を求めることができる。本格的に学びたい方は，この後「**量子力学キャンパス・ゼミ**」で学習されることを勧めます。新たな力学の世界を十分に楽しんで頂けると思います。