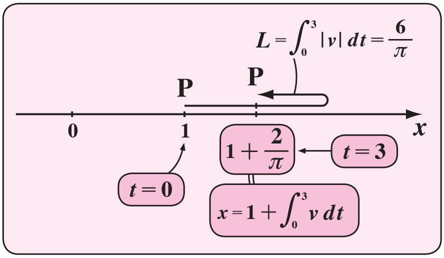
右に，$t=3$ のときの $\mathbf{P}$ の位置(座標) x と，$0 \leqq t \leqq 3$ における $\mathbf{P}$ の道のり L の概略図を示すので，違いをシッカリ理解しよう。



それでは，もう 1 題，直線上を動く動点 $\mathbf{P}$ の問題を解いてみよう。

練習問題 61　位置と道のり (Ⅱ)　CHECK 1　CHECK 2　CHECK 3

x 軸上を運動する動点 $\mathbf{P}(x)$ がある。$\mathbf{P}$ は時刻 $t=0$ のとき原点 $\mathbf{O}$，すなわち $x=0$ にあり，また速度 v は，$v=t^{\frac{3}{2}}-1 \quad (t \geqq 0)$ であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 時刻 $t=t_0$ $(t_0>0)$ のとき，動点 $\mathbf{P}$ は再び原点 $\mathbf{O}$ を通過するものとする。時刻 t_0 の値を求めよ。

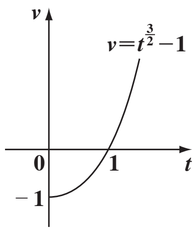
(2) 時刻 $t=0$ から $t=2$ の間に動点 $\mathbf{P}$ が移動した道のり L を求めよ。

(1) では，$x=0+\int_0^{t_0} v\,dt=0$ とおいて，正の数 t_0 の値を求めればいいんだね。
(2) は，道のり L を求める問題なので $L=\int_0^2 |v|\,dt$ を計算しよう。

(1) $t=0$ のとき，$x=0$ (原点) また，

速度 $v=t^{\frac{3}{2}}-1$ ……① $(t \geqq 0)$ より，

このグラフを右に示す。このグラフは，本質的に **P136** で示した $\widetilde{g'(x)}=x^{\frac{3}{2}}-1$ と同じものだ。



動点 $\mathbf{P}$ の時刻 $t=T$ (T：0 以上の定数) における位置座標 x は次式で表される。

$$x=0+\int_0^T v\,dt \qquad \therefore\ x=\int_0^T \left(t^{\frac{3}{2}}-1\right)dt \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$T=t_0$ $(t_0>0)$ のとき，動点 $\mathbf{P}$ は再び原点を通過するので，$x=0$ となる。

よって，②に $T=t_0$，$x=0$ を代入すると，

$v=t^{\frac{3}{2}}-1$ ……………①
$x=\int_0^T (t^{\frac{3}{2}}-1)dt$ ………②

$$0=\int_0^{t_0}(t^{\frac{3}{2}}-1)dt$$

$$=\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-t\right]_0^{t_0}=\frac{2}{5}t_0^{\frac{5}{2}}-t_0-\cancel{0}$$ より，

$$\underbrace{t_0}_{\oplus}\left(\frac{2}{5}t_0^{\frac{3}{2}}-1\right)=0 \quad \cdots\cdots③$$ となる。ここで，$t_0>0$ より，

③の両辺を t_0 で割って，$\frac{2}{5}t_0^{\frac{3}{2}}-1=0$ 　$t_0^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}$

この両辺を $\frac{2}{3}$ 乗すると，

$\underbrace{(t_0^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}}}_{t_0^1=t_0}=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ となる。

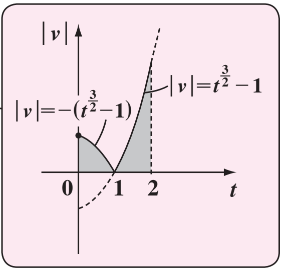
$$\therefore t_0=\left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\left\{\left(\frac{5}{2}\right)^2\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$=\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\underbrace{\sqrt[3]{\frac{25}{4}}}_{1.8\cdots}$$ となる。

(2) では次，$0\leqq t\leqq 2$ の間に動点 P が移動した道のり L を求めると，

$$L=\int_0^2|v|dt=\int_0^2|t^{\frac{3}{2}}-1|dt$$

右図より，$|t^{\frac{3}{2}}-1|=\begin{cases}-(t^{\frac{3}{2}}-1) & (0\leqq t\leqq 1)\\ t^{\frac{3}{2}}-1 & (1\leqq t\leqq 2)\end{cases}$



$$=-\int_0^1(t^{\frac{3}{2}}-1)dt+\int_1^2(t^{\frac{3}{2}}-1)dt$$

$$=-\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-t\right]_0^1+\left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}-t\right]_1^2$$

$$=-\left(\frac{2}{5}-1-\cancel{0}\right)+\frac{2}{5}\cdot\underbrace{2^{\frac{5}{2}}}_{2^{2+\frac{1}{2}}=2^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}=4\sqrt{2}}-2-\left(\frac{2}{5}-1\right)$$

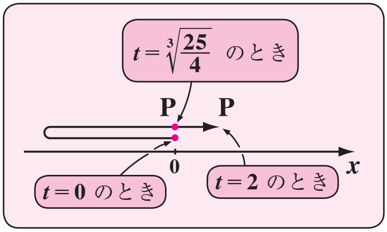
$$=-\left(-\frac{3}{5}\right)+\frac{8\sqrt{2}}{5}-2-\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{5}-2+\frac{6}{5}$$

$$\therefore L = \frac{8\sqrt{2}}{5} - \frac{4}{5} = \frac{4(2\sqrt{2}-1)}{5}$$

となって，答えだ。

今回の動点 **P** の運動の様子を右図に示しておこう。



● 平面上を運動する点 P の道のり L も求めよう！

では次，図 **3** に示すように，xy 平面上を運動する動点 $\mathbf{P}(x, y)$ の座標 x と y は共に時刻 t の関数として，

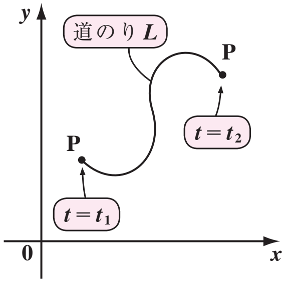
$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (t：時刻) \text{ と表されるの}$$

はいいね。このとき，**P** の速度と速さは

$$\begin{cases} 速度 \quad \vec{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right) \\ 速さ \quad |\vec{v}| = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2} \end{cases}$$

となるので，**(P144)**

図 **3** 平面上を運動する動点 **P** の道のり L



動点 **P** が，時刻 t_1 から t_2 の間に実際に移動する道のりを L とおくと，

$$L = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \quad \cdots\cdots (*5)$$

となる。

ここでは，t は時刻としての物理的な意味をもつんだけれど，数学的には，これは，媒介変数 t で表示された曲線の長さ L の公式とまったく同じものであることが分かるはずだ。**(P229)**

では，次の練習問題を解いてみよう。