最大値・最小値問題の応用

絶対暗記問題 71 難易度 ★★ CHECK1 CHECK2 CHECK3

点(x, y)が原点Oを中心とする半径1の円周上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1) $t = x + y$ とおくとき，t の取り得る値の範囲を求めよ。

(2) $P = xy(x + y - 1)$ とおくとき，P の最大値と最小値を求めよ。 （関西大）

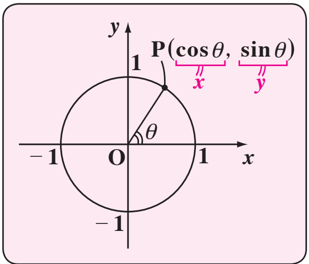
ヒント！ (1) 点(x, y)は原点 O を中心とする単位円周上を動くので，$x^2 + y^2 = 1$ をみたす。よって，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおけるので，$t = x + y = \cos\theta + \sin\theta$ と表せる。(2) では，P を t の 3 次関数 $f(t)$ で表して，$P = f(t)$ のグラフからこの最大値と最小値を求めればいいんだね。

解答＆解説

(1) 点(x, y)は，原点 O を中心とする半径 1 の円周上を動くので，x，y は次式をみたす。

$x^2 + y^2 = 1$ ……①

①より，$x = \cos\theta$，$y = \sin\theta$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とおけるので，$t = x + y$ ……② は，次のように変形できる。



$t = x + y = \cos\theta + \sin\theta = 1\cdot\sin\theta + 1\cdot\cos\theta$

$$= \sqrt{2}\Big(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\cos\frac{\pi}{4}}\sin\theta + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\sin\frac{\pi}{4}}\cos\theta\Big) = \sqrt{2}\Big(\sin\theta\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \cos\theta\cdot\sin\frac{\pi}{4}\Big) = \sqrt{2}\sin\Big(\theta + \frac{\pi}{4}\Big)$$

三角関数の合成

よって，$-1 \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ より，t の取り得る値の範囲は，

$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ である。………………(答)

$-\sqrt{2} \leqq \underbrace{\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)}_{t} \leqq \sqrt{2}$

よって，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ となる。

(2) ②の両辺を 2 乗して，

$t^2 = (x + y)^2 = \underbrace{x^2 + y^2}_{1\,(①より)} + 2xy = 1 + 2xy$ （①より）

$\therefore\ xy = \dfrac{1}{2}(t^2 - 1)$ ……③ となる。

以上②，③より，P は次のように t の 3 次関数 $f(t)$ で表せる。

$\mathrm{P}=f(t)=\underbrace{xy}_{\frac{1}{2}(t^2-1)\ (③より)}\cdot(\underbrace{x+y}_{t\ (②より)}-1)=\frac{1}{2}(t^2-1)(t-1)$ とおくと，

t の定義域（(1)の結果より）

$\therefore\ \mathrm{P}=f(t)=\frac{1}{2}(t^3-t^2-t+1)\quad(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$ となる。

$f(t)$ を t で微分して，

$f'(t)=\frac{1}{2}(3t^2-2t-1)=\frac{1}{2}(3t+1)(t-1)$ より，

$\begin{matrix}3 & & 1\\ & \times & \\ 1 & & -1\end{matrix}$

$f'(t)=0$ のとき，$t=\underbrace{-\frac{1}{3}}_{このとき極大},\ \underbrace{1}_{このとき極小}$ となる。よって，

$f(t)=\frac{1}{2}(t^2-1)(t-1)$ を用いて計算した

極大値 $f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}-1\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{27}$

極小値 $f(1)=\frac{1}{2}(1-1)(1-1)=0$

$f(-\sqrt{2})=\frac{1}{2}(2-1)\cdot(-\sqrt{2}-1)=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

$f(\sqrt{2})=\frac{1}{2}(2-1)(\sqrt{2}-1)=\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

となる。以上より，P は

・$t=x+y=-\frac{1}{3}$ のとき，

　最大値 $\mathrm{P}=\frac{16}{27}$ をとり，

・$t=x+y=-\sqrt{2}$ のとき，

　最小値 $\mathrm{P}=-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ をとる。……(答)

$f(t)$ の増減表 $(-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

t	$-\sqrt{2}$		$-\frac{1}{3}$		1		$\sqrt{2}$
$f'(t)$		↗	0	↘	0	↗	
$f(t)$	$-\frac{\sqrt{2}+1}{2}$		$\frac{16}{27}$		0		$\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

最小値 ⊖　　極大値かつ最大値で，0.59…　　0.20…