演習問題 16　● 留数定理 (I) ●

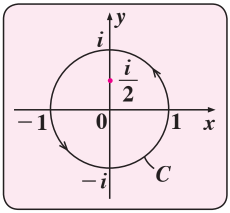
留数定理を用いて，次の 1 周線積分の値を求めよ。ただし，積分路 C は反時計まわりとする。

$$\oint_C \frac{\sin z}{(2z-i)^3}\,dz \qquad C: |z|=1$$

ヒント！ $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^n}$ について，$g(z)$ が $z=\alpha$ で正則で，かつ $g(\alpha)\neq 0$ のとき，$z=\alpha$ は n 位の極である。よって，この留数は $\underset{z=\alpha}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\dfrac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to\alpha}\{(z-\alpha)^n f(z)\}$ で求められるので，$f(z)$ の 1 周線積分は $2\pi i\cdot\underset{z=\alpha}{\mathrm{Res}}\, f(z)$ となるんだね。

解答＆解説

$$f(z)=\frac{\sin z}{(2z-i)^3}=\frac{\sin z}{8}\cdot\frac{1}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^3},\quad g(z)=\frac{\sin z}{8}$$



とおくと，$g(z)$ は $z=\dfrac{i}{2}$ で正則で，$g\left(\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\sin\frac{i}{2}}{8}\neq 0$

より，C 内にある特異点 $z=\dfrac{i}{2}$ は 3 位の極である。

この留数を求めると，

$$\underset{z=\frac{i}{2}}{\mathrm{Res}}\, f(z)=\frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to\frac{i}{2}}\left\{\frac{d^{3-1}}{dz^{3-1}}\left(z-\frac{i}{2}\right)^3 f(z)\right\}$$

$$=\frac{1}{2!}\lim_{z\to\frac{i}{2}}\frac{d^2}{dz^2}\frac{\sin z}{8}=\frac{1}{2}\lim_{z\to\frac{i}{2}}\left(-\frac{1}{8}\sin z\right)=-\frac{1}{16}\sin\frac{i}{2}$$

$$\frac{1}{8}(\sin z)''=\frac{1}{8}(\cos z)'=-\frac{1}{8}\sin z \qquad \frac{e^{\frac{i^2}{2}}-e^{-\frac{i^2}{2}}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{-\frac{1}{2}}-e^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{i^2}{16\times 2i}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-\sqrt{e}\right)=\frac{i}{32}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-\sqrt{e}\right)$$ となる。

以上より，留数定理を用いて求める 1 周線積分の値は次のようになる。

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot\underset{z=\frac{i}{2}}{\mathrm{Res}}\, f(z)=2\pi i\cdot\frac{i}{32}\left(\frac{1}{\sqrt{e}}-\sqrt{e}\right)=\frac{\pi}{16}\left(\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

実践問題 16　● 留数定理 (Ⅰ) ●

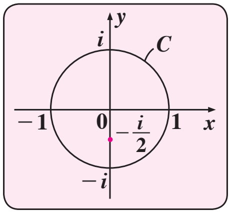
留数定理を用いて，次の 1 周線積分の値を求めよ。ただし，積分路 C は反時計まわりとする。

$$\oint_C \frac{\cos z}{(2z+i)^4}\,dz \qquad\qquad C : |z|=1$$

ヒント！ 4 位の極 $z=-\dfrac{i}{2}$ の留数を求めて，留数定理から 1 周線積分の値を求めよう。

解答&解説

$f(z)=\dfrac{\cos z}{(2z+i)^4}=\dfrac{\cos z}{16}\cdot\dfrac{1}{\left(z+\dfrac{i}{2}\right)^4}$，$g(z)=\dfrac{\cos z}{16}$ と



おくと，$g(z)$ は $z=$ $\boxed{(ア)\quad}$ で正則で，$g\left(-\dfrac{i}{2}\right)=\dfrac{\cos\frac{i}{2}}{16}$

$\neq$ $\boxed{(イ)}$ より，C 内にある特異点 $z=-\dfrac{i}{2}$ は 4 位の極である。

この留数を求めると，

$$\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}} f(z)=\frac{1}{(4-1)!}\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\left\{\frac{d^{4-1}}{dz^{4-1}}\left(z+\frac{i}{2}\right)^4 f(z)\right\}$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\underbrace{\frac{d^3}{dz^3}\frac{\cos z}{16}}=\frac{1}{6}\lim_{z\to-\frac{i}{2}}\frac{1}{16}\sin z=\frac{1}{96}\underbrace{\sin\left(-\frac{i}{2}\right)}$$

$$\frac{1}{16}(\cos z)'''=\frac{1}{16}(-\sin z)''=\frac{1}{16}(-\cos z)'=\frac{1}{16}\sin z$$

$$\frac{e^{-\frac{i^2}{2}}-e^{\frac{i^2}{2}}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$=\frac{1}{192i}\left(\boxed{(ウ)\qquad}\right)$$

以上より，留数定理を用いて求める 1 周線積分の値は次のようになる。

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot\operatorname*{Res}_{z=-\frac{i}{2}} f(z)=2\pi \cancel{i}\cdot\frac{1}{192\cancel{i}}\left(\boxed{(ウ)\qquad}\right)=\boxed{(エ)\qquad}$$

解答　(ア) $-\dfrac{i}{2}$　(イ) 0　(ウ) $\sqrt{e}-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ $\left(\text{または } e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)$　(エ) $\dfrac{\pi}{96}\left(\sqrt{e}-\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$