演習問題 26	● エルミート行列の対角化 ●

エルミート行列 $\boldsymbol{A}_H=\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}i & 0 \\ -\sqrt{2}i & 2 & -2i \\ 0 & 2i & 1 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 $\boldsymbol{U}_U$ を用いて，

$\boldsymbol{U}_U{}^{-1}\boldsymbol{A}_H\boldsymbol{U}_U$ として対角化せよ。

ヒント！ 固有方程式を解いて固有値 λ_j と，これに対応する，大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_j\,(j=1,2,3)$ を求め，そして，ユニタリ行列 $\boldsymbol{U}_U=[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]$ を作って，$\boldsymbol{A}_H$ を対角化しよう。

解答＆解説

$\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ……① ただし，$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{A}_H-\lambda\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2}i & 0 \\ -\sqrt{2}i & 2-\lambda & -2i \\ 0 & 2i & 1-\lambda \end{bmatrix}$ より，

固有方程式 $|\boldsymbol{T}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2}i & 0 \\ -\sqrt{2}i & 2-\lambda & -2i \\ 0 & 2i & 1-\lambda \end{vmatrix}=(1-\lambda)^2(2-\lambda)-2(1-\lambda)-4(1-\lambda)$

$$=-(\lambda-1)\{(\lambda-1)(\lambda-2)-6\}=\boxed{-(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda-4)=0}$$

$(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-4)=0$ より，$\lambda=1,\ -1,\ 4$ となる。 ← 固有値が決定した！

(i) $\lambda_1=1$ とおき，①を $\boldsymbol{T}_1\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ とおくと，①は，

$$\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}i & 0 \\ -\sqrt{2}i & 1 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_1=\begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2}i & 0 \\ -\sqrt{2}i & 1 & -2i \\ 0 & 2i & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}i & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\rightarrow\left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}r=2$$

よって，$\alpha_2=0$，$\alpha_1+\sqrt{2}\alpha_3=0$

$\alpha_3=1$ とおくと，$\alpha_1=-\sqrt{2}$ より，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ここで，$\|\boldsymbol{x}_1\|=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$ より，$\boldsymbol{u}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{x}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} -\sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる。

(ii) $\lambda_2=-1$ とおき，①を $T_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}$ とおくと，①は，

$$\begin{bmatrix}2 & \sqrt{2}i & 0\\ -\sqrt{2}i & 3 & -2i\\ 0 & 2i & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T_2=\begin{bmatrix}2 & \sqrt{2}i & 0\\ -\sqrt{2}i & 3 & -2i\\ 0 & 2i & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\sqrt{2} & i & 0\\ -\sqrt{2}i & 3 & -2i\\ 0 & i & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\sqrt{2} & i & 0\\ 0 & 2 & -2i\\ 0 & i & 1\end{bmatrix}\to\left.\begin{bmatrix}\sqrt{2} & i & 0\\ 0 & 1 & -i\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}r=2$$

よって，$\sqrt{2}\beta_1+i\beta_2=0$，$\beta_2-i\beta_3=0$

$\beta_1=1$ とおくと，$\beta_2=\sqrt{2}i$，$\beta_3=\sqrt{2}$ より，$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}i\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$

ここで，$\|\boldsymbol{x}_2\|=\sqrt{1^2+\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2}i)+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$ より，$\boldsymbol{u}_2=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}i\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$ となる。

(iii) $\lambda_3=4$ とおき，①を $T_3\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{bmatrix}$ とおくと，①は，

$$\begin{bmatrix}-3 & \sqrt{2}i & 0\\ -\sqrt{2}i & -2 & -2i\\ 0 & 2i & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\\ \gamma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$T_3=\begin{bmatrix}-3 & \sqrt{2}i & 0\\ -\sqrt{2}i & -2 & -2i\\ 0 & 2i & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{2}i & 0\\ 1 & -\sqrt{2}i & \sqrt{2}\\ 0 & 2i & -3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{2}i & 0\\ 0 & -2i & 3\\ 0 & 2i & -3\end{bmatrix}\to\left.\begin{bmatrix}3 & -\sqrt{2}i & 0\\ 0 & 2i & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right\}r=2$$

よって，$3\gamma_1-\sqrt{2}i\gamma_2=0$，$2i\gamma_2-3\gamma_3=0$

$\gamma_2=3$ とおくと，$\gamma_1=\sqrt{2}i$，$\gamma_3=2i$ より，$\boldsymbol{x}_3=\begin{bmatrix}\sqrt{2}i\\ 3\\ 2i\end{bmatrix}$

ここで，$\|\boldsymbol{x}_3\|=\sqrt{\sqrt{2}i\cdot(-\sqrt{2}i)+3^2+2i\cdot(-2i)}=\sqrt{15}$ より，$\boldsymbol{u}_3=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}\sqrt{2}i\\ 3\\ 2i\end{bmatrix}$

以上 (i)(ii)(iii) より，$U_U=[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{u}_3]=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}-\sqrt{10} & \sqrt{3} & \sqrt{2}i\\ 0 & \sqrt{6}i & 3\\ \sqrt{5} & \sqrt{6} & 2i\end{bmatrix}$ であり，

U_U を用いて，A_H は $U_U^{-1}A_HU_U=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ と対角化できる。…………(答)