演習問題 119　● エルミート行列の対角化 (Ⅱ) ●

エルミート行列 $A_H = \begin{bmatrix} 5 & \sqrt{7}\,i \\ -\sqrt{7}\,i & -1 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 U_U を用いて，$U_U^{-1} A_H U_U$ として対角化せよ。

ヒント！ 固有方程式 $|T| = |A_H - \lambda E| = 0$ を解いて，2つの固有値 λ_1，λ_2 を求め，これに対応する2つの正規直交ベクトル $\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$ から，ユニタリ行列 $U_U = [\,\boldsymbol{u}_1 \ \ \boldsymbol{u}_2\,]$ を作るんだね。

解答＆解説

$\underbrace{T}_{(A_H-\lambda E)\text{のこと}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ……① $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$　ただし，$T = A_H - \lambda E = \begin{bmatrix} 5-\lambda & \sqrt{7}\,i \\ -\sqrt{7}\,i & -1-\lambda \end{bmatrix}$ とおく。

固有方程式 $|T| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & \sqrt{7}\,i \\ -\sqrt{7}\,i & -1-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(5-\lambda)(-1-\lambda)}_{(\lambda-5)(\lambda+1)} - \underbrace{\sqrt{7}\,i\cdot(-\sqrt{7}\,i)}_{7} = 0$

を解いて，固有値 λ を求める。$\lambda^2 - 4\lambda - 5 - 7 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 12 = 0$　$(\lambda-6)(\lambda+2) = 0$　$\therefore \lambda = \underbrace{6}_{\lambda_1},\ \underbrace{-2}_{\lambda_2\text{とおく}}$

(i) $\lambda_1 = 6$ のとき，①を $T_1\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$　そして，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{7}\,i \\ -\sqrt{7}\,i & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & \sqrt{7}\,i \\ -\sqrt{7}\,i & -7 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{7}\,i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\Big\}\,r = 1$$

$-\alpha_1 + \sqrt{7}\,i\cdot\alpha_2 = 0$

ここで，$\alpha_2 = k_1$ とおくと，

$\alpha_1 = \sqrt{7}\,i\cdot k_1$

$\therefore \boldsymbol{x}_1 = k_1\begin{bmatrix} \sqrt{7}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$　$(k_1 \neq 0)$

ここで，$k_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は正規化される。これを $\boldsymbol{u}_1$ とおくと，

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{7}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} \sqrt{7}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|\boldsymbol{x}_1'\|^2 = {}^t\boldsymbol{x}_1'\,\overline{\boldsymbol{x}}_1'$

$= [\sqrt{7}\,i \ \ 1]\begin{bmatrix} -\sqrt{7}\,i \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \sqrt{7}\,i\cdot(-\sqrt{7}\,i) + 1\cdot 1 = 7 + 1 = 8$

$\therefore \|\boldsymbol{x}_1'\| = \underbrace{2\sqrt{2}}_{\sqrt{8}}$ より，$k_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ とおく。

(ⅱ) $\lambda_2=-2$ のとき，①を $T_2\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$ そして，$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix}7 & \sqrt{7}i\\ -\sqrt{7}i & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}7 & \sqrt{7}i\\ -\sqrt{7}i & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\sqrt{7} & i\\ -\sqrt{7}i & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\sqrt{7} & i\\ 0 & 0\end{bmatrix}\Big\}\, r=1$$

$$\sqrt{7}\beta_1+i\cdot\beta_2=0$$

$\beta_1=k_2$ とおくと，$\beta_2=-\dfrac{\sqrt{7}k_2}{i}=\dfrac{i^2\sqrt{7}k_2}{i}=\sqrt{7}i\cdot k_2$

$$\therefore\ \boldsymbol{x}_2=k_2\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{7}i\end{bmatrix}\quad(k_2\neq 0)$$

ここで，$k_2=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2$ は正規化される。よって，これを $\boldsymbol{u}_2$ とおくと，

$$\boldsymbol{u}_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{7}i\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x}_2'=\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{7}i\end{bmatrix}$ とおくと，

$$\|\boldsymbol{x}_2'\|^2={}^t\boldsymbol{x}_2'\,\overline{\boldsymbol{x}}_2'=[1\ \ \sqrt{7}i]\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{7}i\end{bmatrix}$$

$$=1^2-7i^2=8$$

$\therefore\ \|\boldsymbol{x}_2'\|=2\sqrt{2}$ より，$k_2=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ とおく。

以上(ⅰ)，(ⅱ)より，ユニタリ行列 U_U を

$$U_U=\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{7}i & 1\\ 1 & \sqrt{7}i\end{bmatrix}$$ とおくと，エルミート行列 A_H は，

$$U_U^{-1}A_HU_U=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$ と対角化される。……………………………………(答)

$U_U^{-1}A_HU_U$ を実際に計算して，確認しておこう。

$U_U=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}\sqrt{7}i & 1\\ 1 & \sqrt{7}i\end{bmatrix}$ より，$U_U^{-1}={}^t\overline{U}_U=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-\sqrt{7}i & 1\\ 1 & -\sqrt{7}i\end{bmatrix}$

$$\therefore\ U_U^{-1}A_HU_U=\frac{1}{8}\underline{\begin{bmatrix}-\sqrt{7}i & 1\\ 1 & -\sqrt{7}i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & \sqrt{7}i\\ -\sqrt{7}i & -1\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\sqrt{7}i & 1\\ 1 & \sqrt{7}i\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}\underline{\begin{bmatrix}-6\sqrt{7}i & 6\\ -2 & 2\sqrt{7}i\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}\sqrt{7}i & 1\\ 1 & \sqrt{7}i\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}48 & 0\\ 0 & -16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$ となって，

間違いないことが分かった。