ここで，$q(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[q(t)] = Q(s)$ とおくこととして，①の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[\ddot{q}(t)]}_{s^2Q(s)-sq(0)-\dot{q}(0)} = \mathcal{L}\left[-\boxed{\frac{1}{LC}}\,q(t)\right]$$

ω^2（定数）とおく。

公式：$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$$s^2Q(s) - s\underbrace{q(0)}_{q_0} - \underbrace{\cancel{\dot{q}(0)}}_{0} = -\omega^2 Q(s)$$

$$(s^2+\omega^2)Q(s) = sq_0 \qquad \therefore\ Q(s) = \frac{q_0 \cdot s}{s^2+\omega^2} \quad \cdots\cdots②$$ となる。

よって，②の両辺をラプラス逆変換して $q(t)$ を求めると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Q(s)]}_{q(t)} = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[q_0 \cdot \frac{s}{s^2+\omega^2}\right]}_{q_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = q_0\cos\omega t}$$ より，

公式：$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos at$

$q(t) = q_0\cos\omega t$ ……③ となって，P203 と同じ結果が導ける。

後は，③の両辺を t（時刻）で微分すれば電流 $i(t)$ も，

$i(t) = \dfrac{dq(t)}{dt} = -q_0\omega\sin\omega t$ と求めることができるんだね。大丈夫？

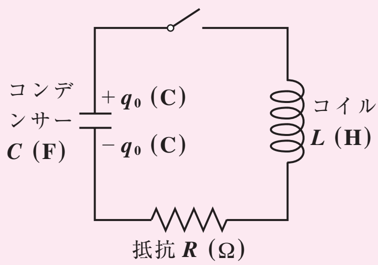
● *RLC* 回路もラプラス変換で解こう！

では次，P207 で解説した *RLC* 回路についても，ラプラス変換で解いてみよう。ここで，新たに利用するラプラス変換の公式は次の 2 つだ。

$$\begin{cases} \mathcal{L}[\sin at] = \dfrac{a}{s^2+a^2} \\ \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a) \end{cases}$$

（ただし，$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$）

これらの証明は自分で確認してみるといいよ。



$\left(\dfrac{R}{L} = 1\ (1/\mathrm{s}),\ LC = \dfrac{4}{5}\ (\mathrm{s}^2)\right)$

P207 で解説したように，この RLC 回路のコンデンサーの電圧を $q(t)$ とおくと，この微分方程式は，次のようになる。

$$\ddot{q}+\frac{R}{L}\dot{q}+\frac{1}{LC}q=0 \quad \cdots\cdots①$$

①に，$\dfrac{R}{L}=1\ (1/\mathrm{s})$，$LC=\dfrac{4}{5}\ (\mathrm{s}^2)$ を代入すると，

$$\ddot{q}+\dot{q}+\frac{5}{4}q=0 \quad \cdots\cdots②$$ となる。

ここで，$q(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[q(t)]=Q(s)$ とおくことにして，②の両辺をラプラス変換すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[\ddot{q}(t)]}_{s^2Q(s)-sq(0)-\dot{q}(0)}+\underbrace{\mathcal{L}[\dot{q}(t)]}_{sQ(s)-q(0)}+\frac{5}{4}\underbrace{\mathcal{L}[q(t)]}_{Q(s)}=0$$

公式：
$\mathcal{L}[\dot{f}(t)]=sF(s)-f(0)$
$\mathcal{L}[\ddot{f}(t)]=s^2F(c)-sf(0)-\dot{f}(0)$

$$s^2Q(s)-s\underbrace{q(0)}_{q_0}-\underbrace{\cancel{\dot{q}(0)}}_{0}+sQ(s)-\underbrace{q(0)}_{q_0(\text{初期条件})}+\frac{5}{4}Q(s)=0$$

$$\left(s^2+s+\frac{5}{4}\right)Q(s)=q_0(s+1) \qquad \left\{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1\right\}Q(s)=q_0(s+1)$$

$$\therefore\ Q(s)=q_0\frac{\left(s+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}=q_0\underbrace{\left\{\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right\}}_{\text{後のラプラス逆変換のために}\left(s+\frac{1}{2}\right)\text{の形を保っておこう！}} \quad \cdots\cdots③$$

③が求められたので，③の両辺をラプラス逆変換して，$q(t)$ を求めることができる。ここで，公式：$\mathcal{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a)$ より，

$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}f(t)=e^{at}\cdot\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ となることに気を付けて，

$$q(t)=\mathcal{L}^{-1}[Q(s)]=q_0\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+\frac{1}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+1}\right]$$

$$=q_0e^{-\frac{1}{2}t}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1}\right]$$

公式：
$\mathcal{L}^{-1}[F(s-a)]=e^{at}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
$\left(\text{今回は，}a=-\frac{1}{2}\text{ の場合だね。}\right)$

$$=q_0e^{-\frac{1}{2}t}\Bigg\{\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+1}\right]}_{\cos t}+\frac{1}{2}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right]}_{\sin t}\Bigg\}$$

公式：
$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$
$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin at$
（これは，$a=1$ の場合だね。）

$\therefore\ q(t)=q_0e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cos t+\frac{1}{2}\sin t\right)$ となる。

よって，この RLC 回路を流れる電流 $i(t)$ は，
$i(t)=\dot{q}(t)$ より求められるので，

公式：$(fg)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

$$i(t)=\dot{q}(t)=q_0\left\{-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}\left(\cancel{\cos t}+\frac{1}{2}\sin t\right)+e^{-\frac{1}{2}t}\left(-\sin t+\cancel{\frac{1}{2}\cos t}\right)\right\}$$

$=q_0\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)e^{-\frac{1}{2}t}\sin t=-\frac{5}{4}q_0e^{-\frac{1}{2}t}\sin t$ となって，**P209** で求めた結果と一致するんだね。これも，面白かったでしょう？

この *Appendix* では，ラプラス変換の入門ということで，本当に基礎的なものしか扱っていないんだけれど，これでも，ラプラス変換の威力を十分にご理解頂けたと思う。さらに，本格的なラプラス変換をマスターされたい方は，**「ラプラス変換キャンパス・ゼミ」(マセマ)** で是非勉強して頂きたい。

天才ヘヴィサイドが考案し，その後，カールソンやブロムウィッチ等，優秀な数学者によって洗練された理論として組み立てられた，奥深くて面白いこの“ラプラス変換”の世界を十分に堪能して頂けると思います。