● 二項分布から正規分布へ！

二項分布 $B(n, p)$：$P_B(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$ $(x = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$ は，離散型の確率分布だけれど，n を大きくしていくと，近似的に x を連続型

ポアソン分布にするとき，μ を一定にして，$n \to \infty$ としたので $p \to 0$ となったが，正規分布にするときは，n を大きくするだけで，p の値は一定のままでいい。

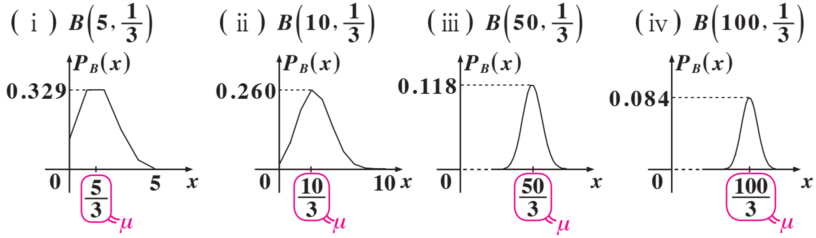
の確率変数と考えられるようになり，最終的には，“**正規分布**”(***normal distribution***) と呼ばれる連続型の確率分布になる。この正規分布は，その期待値（平均）μ と分散 σ^2 を使って，$N(\mu, \sigma^2)$ と表す。この変形のプロセスを下にまとめて示す。

二項分布→正規分布

二項分布（離散型）		正規分布（連続型）
$(B(n, p)$ と表す。$)$	$\xrightarrow{}$	$(N(\mu, \sigma^2)$ と表す。$)$
・確率関数 $P_B(x) = {}_nC_x\, p^x q^{n-x}$ $(x = 0, 1, \cdots, n)$	$n \gg 0$ $\begin{cases} p\ (一定) \\ x \gg 0 \end{cases}$	・確率密度 $f_N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ （x：連続型変数）
・モーメント母関数 $M_B(\theta) = (pe^\theta + q)^n$		・モーメント母関数 $M_N(\theta) = e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$
・期待値と分散 $\begin{cases} E_B[X] = np \quad [= \mu] \\ V_B[X] = npq \end{cases}$		・期待値と分散 $\begin{cases} E_N[X] = \mu \\ V_N[X] = \sigma^2 \end{cases}$

二項分布で，たとえば $p = \dfrac{1}{3}$ と固定してから，$n = 5, 10, 50, 100$ と変化させたときのグラフを図2に示す。

図2　二項分布 $B(n, p)$



$(x = 0, 1, 2, \cdots\cdots$ に対応する各点を実線で結んだもの）

図 2 から，n を 50，100，……と大きくしていくにつれて，キレイなすり鉢型の確率分布の形に近づいていくのがわかるはずだ。今回は，$n \to \infty$ のように極限的に n を大きくしていくわけではないが，n を 100，1000，10000 などと十分大きくしていく場合を考える。これを $n \gg 0$ のように表現する。ここで，図 2 の (iii)(iv) から類推してわかるように，$n \gg 0$ と n を大きくすると，$\mu = np$ の付近に分布が集中していること，すなわち $n \gg 0$ とすると，対象となる x も $x \gg 0$ となることに気を付けよう。

それでは，二項分布 $B(n,\ p)$ で，$n \gg 0$ としたとき，これが正規分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$ の確率密度 $f_N(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ （x は連続型の変数）に近づいていくことを示すことにしよう。

$n \gg 0$ のとき，$x \gg 0$ （x は，$\mu = np$ の付近に存在する）

ここで，二項分布の確率関数 $P_B(x) = {}_n\mathrm{C}_x\, p^x q^{n-x}\ (>0)$ （$x = 0,\ 1,\ \cdots,\ n$）の自然対数をとったものを，新たに $g(x)$ とおく。

$$g(x) = \log P_B(x) = \log\left\{\frac{n!}{x!(n-x)!}p^x \cdot (1-p)^{n-x}\right\} \qquad (p+q=1)$$

$$g(x) = \underbrace{\log n!}_{\text{定数}} - \log x! - \log(n-x)! + x\underbrace{\log p}_{\text{定数}} + (n-x)\underbrace{\log(1-p)}_{\text{定数}} \quad \cdots\cdots①$$

ここで，x は 1 ずつ変化するとびとびの離散値をとるのだが，$h(x) = \log x!$ は，$x \gg 0$ （x は十分大きな自然数）より，x が 1 だけ増加しても，ほんのわずかしか変化しない。

よって，離散値をとる $h(x) = \log x!$ の $[x,\ x+\varDelta x]$ （$\varDelta x = 1$）における平均変化率を，その x （これはある十分大きな自然数）における微分係数とみることができて，それを $h'(x)$ で表わすと，

$$h'(x) \fallingdotseq \frac{h(x) - h(x-\varDelta x)}{\varDelta x} = \frac{h(x) - h(x-1)}{1} \qquad (\varDelta x = 1)$$

$$= \log x! - \log(x-1)! = \log\frac{x!}{(x-1)!} = \log x \text{ となる。}$$

$\therefore\ (\log x!)' \fallingdotseq \log x \quad \cdots\cdots②$ （$x \gg 0$ のとき）