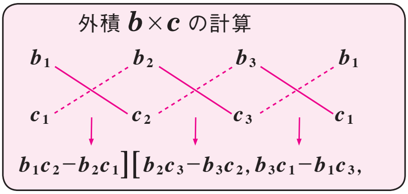
● スカラー 3 重積をもう 1 度考えよう！

これまで行列式を学んだので，この行列式を利用すると，スカラー 3 重積 (**P16**) をシンプルに表すことができるんだね。3 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{a}=[a_1\ \ a_2\ \ a_3]$, $\boldsymbol{b}=[b_1\ \ b_2\ \ b_3]$, $\boldsymbol{c}=[c_1\ \ c_2\ \ c_3]$ を使って，

スカラー 3 重積は，$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ と表されるんだったね。そして，外積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は右のように計算することによって，



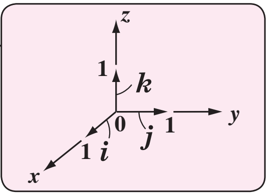
$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=[\underset{\begin{vmatrix}b_2&b_3\\c_2&c_3\end{vmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\underline{b_2c_3-b_3c_2}}}\ \ \underset{\begin{vmatrix}b_3&b_1\\c_3&c_1\end{vmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\underline{b_3c_1-b_1c_3}}}\ \ \underset{\begin{vmatrix}b_1&b_2\\c_1&c_2\end{vmatrix}\text{のこと}}{\underset{\shortparallel}{\underline{b_1c_2-b_2c_1}}}]\quad\cdots\cdots①$$

と表される。

各成分は行列式で表される

ここで，$\boldsymbol{i}=[1,0,0]$，$\boldsymbol{j}=[0,1,0]$，$\boldsymbol{k}=[0,0,1]$ とおくと，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ はさらに，①より

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=(b_2c_3-b_3c_2)\underline{\boldsymbol{i}}+(b_3c_1-b_1c_3)\underline{\underline{\boldsymbol{j}}}+(b_1c_2-b_2c_1)\underline{\boldsymbol{k}}\quad\cdots\cdots②$$



と表されているのはいいね。すると，これは，行列式の表現法を利用して，形式的にではあるんだけれど，次のように表すことができる。

$$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

第 1 行の各成分はベクトル

もちろん，③の右辺の第 1 行の各成分は $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ とベクトルであるため，これは行列式と呼ぶことはできないけれど，③の右辺をサラスの公式を使って展開すると，②式が導かれることが分かるはずだ。

ここで，スカラー 3 重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の内積だから，これらの x 成分同士，y 成分同士，z 成分同士の積の和となるので，

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(b_2c_3-b_3c_2)\underline{a_1}+(b_3c_1-b_1c_3)\underline{\underline{a_2}}+(b_1c_2-b_2c_1)\underline{a_3}\quad\cdots\cdots④$$

となり，④の $\underline{a_1}$，$\underline{\underline{a_2}}$，$\underline{a_3}$ は②の $\underline{\boldsymbol{i}}$，$\underline{\underline{\boldsymbol{j}}}$，$\underline{\boldsymbol{k}}$ を置き換えたものだから，このスカラー 3 重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は，③の代わりに今度は本当の行列式として，次のようにシンプルに表されることになるんだね。

スカラー3重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ ……(＊1)

したがって，P17の例題 $\boldsymbol{a}=[1\ \ -1\ \ 2]$, $\boldsymbol{b}=[2\ \ 1\ \ 1]$, $\boldsymbol{c}=[1\ \ -1\ \ 3]$ のスカラー3重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は，次のように計算できる。

$$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

サラスの公式通りだね

$$=1\cdot1\cdot3+(-1)\cdot1\cdot1+2\cdot(-1)\cdot2-2\cdot1\cdot1\cdot-1\cdot(-1)\cdot1-3\cdot2\cdot(-1)$$

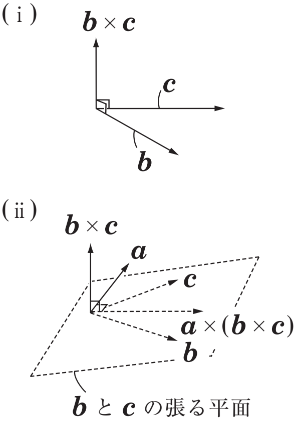
$=3-\cancel{1}-\cancel{4}-\cancel{2}+\cancel{1}+\cancel{6}=3$ と，アッサリ求まるんだね。面白かった？

● ベクトル3重積 $a\times(b\times c)$ もマスターしよう！

同じく，3つの3次元ベクトル $\boldsymbol{a}=[a_1\ \ a_2\ \ a_3]$, $\boldsymbol{b}=[b_1\ \ b_2\ \ b_3]$, $\boldsymbol{c}=[c_1\ \ c_2\ \ c_3]$ を用いて，新たなベクトル $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を定義できる。これを，**“ベクトル3重積”** と呼ぶ。これは，2つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の外積なので，当然ベクトルだね。

そして，図1(ⅰ)に示すように，$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の両方に直交するベクトルであり，さらに，図1(ⅱ)に示すように，ベクトル3重積 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ の両方に直交するベクトルだね。ということは，ベクトル3重積 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は，

図1
ベクトル3重積 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$


(ⅰ)
(ⅱ)

$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の張る平面上のベクトルになるので，これは，

ここでは，$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ は1次独立と考えよう！

$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ の1次結合で，次のように表せるはずだね。

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\underbrace{k}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}\cdot\boldsymbol{b}-\underbrace{l}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\cdot\boldsymbol{c}\quad(k,\ l：定数係数)$$

そして，この定数係数 k，l は，実は $k=\underbrace{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}_{\boldsymbol{a}と\boldsymbol{c}の内積}$，$l=\underbrace{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}_{\boldsymbol{a}と\boldsymbol{b}の内積}$ と表せる。

したがって，ベクトル3重積 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ について，次の公式

ベクトル3重積 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ …………(＊2)

が成り立つので，これも覚えておこう。

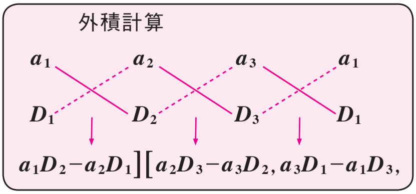
$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は，外積を2回も行わないといけないので，意外と計算がメンドウなんだけれど，(＊2)の公式では，2つの内積と1次結合の計算だけなので，比較的楽に $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を求められるんだね。

では，(＊2)が成り立つことをここで証明しておこう。

$\boldsymbol{a}=[a_1\ \ a_2\ \ a_3]\qquad \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=[D_1\ \ D_2\ \ D_3]$ とおく。ただし

$$\begin{cases} D_1=\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}=b_2c_3-b_3c_2 \\ D_2=\begin{vmatrix} b_3 & b_1 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}=b_3c_1-b_1c_3 \\ D_3=\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}=b_1c_2-b_2c_1 \end{cases}$$

である。


外積計算

よって，ベクトル3重積 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=[\underline{a_2D_3-a_3D_2}\ \ \underline{a_3D_1-a_1D_3}\ \ \underline{a_1D_2-a_2D_1}]$$ だね。

$$a_2(b_1c_2-b_2c_1)-a_3(b_3c_1-b_1c_3)$$
$$=(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_2b_2+a_3b_3)c_1$$

b_1 と c_1 でまとめた

$$=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1$$

$a_1b_1c_1$ をたした分，ひいた

$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1$$

同様に計算して
$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_2$

同様に計算して
$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3$

これをまとめると，

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1\ \ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_2\ \ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3]$$
$$=[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3]-[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_1\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_2\ (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_3]$$
$$=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\underbrace{[b_1\ \ b_2\ \ b_3]}_{\boldsymbol{b}}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\underbrace{[c_1\ \ c_2\ \ c_3]}_{\boldsymbol{c}}$$ となって

定数項をくくり出した。

定数項をくくり出した。

公式 $\overset{①\ ②}{\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})}=\underbrace{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})}_{①の内積}\boldsymbol{b}-\underbrace{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})}_{②の内積}\boldsymbol{c}$ …………(＊2) が導けるんだね。

では，先程の例題の 3 つのベクトル

$\boldsymbol{a}=[1,-1,2]$，$\boldsymbol{b}=[2,1,1]$，$\boldsymbol{c}=[1,-1,3]$ を使って，ベクトル 3 重積 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を求めてみよう。まず，2 つの係数を求めると

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=1\cdot1+(-1)\cdot(-1)+2\cdot3=1+1+6=8\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\cdot2+(-1)\cdot1+2\cdot1=2-1+2=3\end{cases}$$ となる。

よって，

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\underbrace{8}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}-\underbrace{3}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}\boldsymbol{c}=8[2\ \ 1\ \ 1]-3[1\ \ -1\ \ 3]$$

$$=[16\ \ 8\ \ 8]-[3\ \ -3\ \ 9]$$

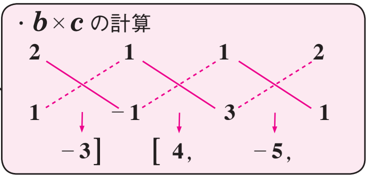
$$=[13\ \ 11\ \ -1]$$ となって，答えだ。

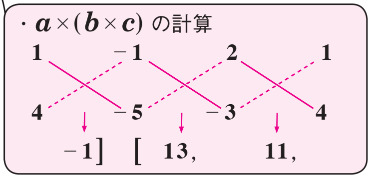
ちなみに，これを直接外積計算から求めると

・$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}=[4\ \ -5\ \ -3]$

・$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=[13\ \ 11\ \ -1]$

となって，同じ結果が導けるんだね。





ここで，ベクトル 3 重積について，一般的に結合の法則は成り立たない。つまり，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\fallingdotseq(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ であることも覚えておこう。そして $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ についても (＊2) と同様の公式を導いてみよう。

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=-\overset{①\ ②}{\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}$$ ← 公式 $\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{x}$

$$=-\{\underbrace{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})}_{①の内積}\boldsymbol{a}-\underbrace{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})}_{②の内積}\boldsymbol{b}\}=\underbrace{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})}_{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}\boldsymbol{b}-\underbrace{(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b})}_{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}}\boldsymbol{a}$$

内積には，
交換の法則が
成り立つ

$\therefore\ (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$ …………(＊2)′ が成り立つ。

これで，ベクトル 3 重積についても，その基本をご理解頂けたと思う。