$$Y(s)=\frac{4-s^2}{s(s^2+4)}$$
$$=\frac{1}{s}-2\cdot\frac{s}{s^2+4}\quad\cdots\cdots⑤'\quad となる。$$

$\dfrac{4-s^2}{s(s^2+4)}=\dfrac{a}{s}+\dfrac{bs+c}{s^2+4}$ とおくと

右辺 $=\dfrac{a(s^2+4)+s(bs+c)}{s(s^2+4)}$

$=\dfrac{(\underbrace{\boxed{a+b}}_{-1})s^2+\underbrace{\boxed{c}}_{0}s+\underbrace{\boxed{4a}}_{4}}{s(s^2+4)}$ より

$a+b=-1,\ c=0,\ 4a=4$

$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=0$ となる

よって $\dfrac{4-s^2}{s(s^2+4)}=\dfrac{1}{s}-\dfrac{2s}{s^2+4}$

(i) よって，④の両辺を逆変換して，解 $x(t)$ を求めると

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]}_{x(t)}=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2\cdot 2}{s^2+4}\right]}_{2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s^2+2^2}\right]=2\sin 2t}\quad より$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]=\sin at$$

$\therefore\ x(t)=2\sin 2t$ である。

(ii) 次に⑤´ の両辺を逆変換して，解 $y(t)$ を求めると，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)}=\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-2\cdot\frac{s}{s^2+4}\right]}_{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]-2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+2^2}\right]=1-2\cos 2t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]=\cos at$$

$\therefore\ y(t)=1-2\cos 2t$ である。

どう？ラプラス変換も，三角関数まで含めると，さらに解ける問題の幅が広がって，面白かったでしょう？

では次，高階微分方程式も，ラプラス変換を利用して解いてみよう。

$y'(t)$ のラプラス変換が $\mathcal{L}[y'(t)]=sY(s)-y(0)\cdots(*3)$ となることを利用して，$y''(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[y''(t)]$ が

$$\mathcal{L}[y''(t)]=\mathcal{L}[\{y'(t)\}']=s\underbrace{\mathcal{L}[y'(t)]}_{\{sY(s)-y(0)\}\ ((*3)\text{ より})}-y'(0)=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)\cdots(*3)'$$

となることは既に教えたね。同様に，$y'''(t)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[y'''(t)]$ も $(*3)$ と $(*3)'$ を利用すると，次のように求められるんだね。

$$\mathcal{L}[y'(t)] = sY(s) - y(0) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (*3)$$
$$\mathcal{L}[y''(t)] = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) \cdots\cdots (*3)'$$

$$\mathcal{L}[y'''(t)] = \mathcal{L}[\{y''(t)\}']$$
$$= s\underbrace{\mathcal{L}[y''(t)]}_{\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\}\ ((*3)'\text{ より})} - y''(0) \quad ((*3)\text{ より})$$
$$= s\{s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)\} - y''(0) \quad ((*3)'\text{ より})$$

これから，公式：$\mathcal{L}[y'''(t)] = s^3Y(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) \cdots\cdots (*3)''$
が導ける。これらの公式を用いて，次の高階微分方程式を解いてみよう。

● 練習問題 ●

次の微分方程式をラプラス変換を使って解こう。(ただし，y は t の関数である)

$y''' - 3y'' + 2y' = 0$ ………① $\quad (y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = -2)$

①の両辺のラプラス変換を求めると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[y''' - 3y'' + 2y']}_{\mathcal{L}[y'''] - 3\mathcal{L}[y''] + 2\mathcal{L}[y']} = \underbrace{\mathcal{L}[0]}_{0}$$

線形性

ここで，$y(t)$ のラプラス変換を $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ とおいて，これをさらに $(*3)$，$(*3)'$，$(*3)''$ を使って変形すると，

$$\underbrace{\mathcal{L}[y''']}_{s^3Y(s) - s^2\underbrace{y(0)}_{0} - s\underbrace{y'(0)}_{0} - \underbrace{y''(0)}_{(-2)}\ ((*3)''\text{ より})} - 3\underbrace{\mathcal{L}[y'']}_{s^2Y(s) - s\underbrace{y(0)}_{0} - \underbrace{y'(0)}_{0}\ ((*3)'\text{ より})} + 2\underbrace{\mathcal{L}[y']}_{sY(s) - \underbrace{y(0)}_{0}\ ((*3)\text{ より})} = 0 \quad \text{より}$$

$$s^3Y(s) + 2 - 3\cdot s^2Y(s) + 2\cdot sY(s) = 0$$

$$\underbrace{(s^3 - 3s^2 + 2s)}_{s(s^2 - 3s + 2) = s(s-1)(s-2)}Y(s) = -2$$

$$\therefore\ Y(s) = -\frac{2}{s(s-1)(s-2)} \cdots\cdots ② \quad \text{となる。}$$

②の右辺をさらに部分分数に分解して

$$Y(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s-2} \quad \cdots\cdots②'$$

ここで，②の右辺を部分分数に分解した係数 a, b, c の値は次のように求めた。

$$-\frac{2}{s(s-1)(s-2)} = \frac{a}{s} + \frac{b}{s-1} + \frac{c}{s-2} \quad \cdots\cdots③$$

・③の両辺に s をかけて，$s=0$ を代入すると，b と c の項は 0 となって a の値を求めることができる。これを次のように表す。

$$a = -\left.\frac{2}{(s-1)(s-2)}\right|_{s=0} = -\frac{2}{-1\times(-2)} = -\frac{2}{2} = -1$$

・同様に，③の両辺に $s-1$ をかけて，$s=1$ を代入して b を求めると

$$b = -\left.\frac{2}{s(s-2)}\right|_{s=1} = -\frac{2}{1\cdot(1-2)} = -\frac{2}{-1} = 2$$

・同様に，③の両辺に $s-2$ をかけて，$s=2$ を代入して c を求めると

$$c = -\left.\frac{2}{s(s-1)}\right|_{s=2} = -\frac{2}{2\cdot(2-1)} = -\frac{2}{2} = -1$$

②´の両辺について，ラプラス逆変換を行うと，

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]}_{y(t)} = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s} + 2\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s-2}\right]$$

$$= -\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]}_{1} + 2\underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]}_{e^t} - \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right]}_{e^{2t}}$$

公式：

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$$

よって，求める解 $y(t)$ は，

$y(t) = -1 + 2e^t - e^{2t}$ となるんだね。大丈夫？

実は，ラプラス変換はこのような実践面だけでなく，理論的にも奥深い内容がまだまだたくさんあるんだね。だから，より本格的にこのラプラス変換を学んでみたい方には，「**ラプラス変換キャンパス・ゼミ**」(**マセマ**)をお勧めする。新たな数学的展望が広がっていくはずです。是非チャレンジしてください。