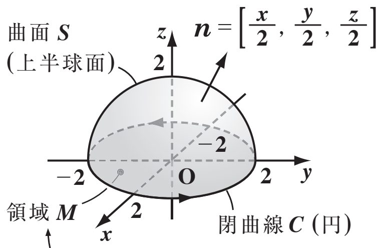
演習問題 13 ● ストークスの定理 ●

ベクトル場 $\boldsymbol{f}=[-2xy-y,\ 2z-x^2,\ 2y]$ に，曲面 S : $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geqq 0)$ と閉曲線 C : $x^2+y^2=4$ $(z=0)$ がある。このとき，ストークスの定理 $\iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{p}$ ……$(*)$ が成り立つことを確認せよ。（ただし，単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ の z 成分は 0 以上とする。）

ヒント！ ストークスの定理 $(*)$ の左辺と右辺を計算して，一致することを示せばいい。

解答＆解説



S の xy 平面への正射影を領域 M とおく。

曲面 S は，原点 O を中心とする半径 2 の上半球面で，その境界の閉曲線 C は xy 平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円である。

・ベクトル場 $\boldsymbol{f}$ の回転を求めると，

$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}=[0,\ 0,\ 1]$ となる。

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ -2xy-y & 2z-x^2 & 2y & -2xy-y \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ -\cancel{2x}-(-\cancel{2x}-1)] & [2-2, & 0-0, & \end{array}$$

・曲面 S : $x^2+y^2+z^2=4$ $(z\geqq 0)$ より，

$F(x,\ y,\ z)=x^2+y^2+z^2-4=0$ とおくと，これはスカラー場 $F(x,\ y,\ z)$ の等位曲面の 1 つである。よって，その勾配ベクトル ∇F とそのノルムは，

$\nabla F=[2x,\ 2y,\ 2z]$

$\|\nabla F\|=\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+(2z)^2}=\sqrt{4(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{4})}=4$　である。

これから，曲面 S 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ における単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は，

$$\boldsymbol{n}=\frac{1}{\|\nabla F\|}\nabla F=\frac{1}{4}[2x,\ 2y,\ 2z]=\left[\frac{x}{2},\ \frac{y}{2},\ \underbrace{\frac{z}{2}}_{\cos\gamma}\right]$$

$z\geqq 0$ より $\cos\gamma\geqq 0$ をみたす。

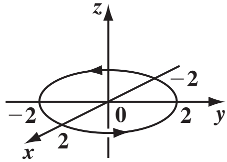
(i) よって，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}=[0,\ 0,\ 1]\cdot\left[\dfrac{x}{2},\ \dfrac{y}{2},\ \dfrac{z}{2}\right]=\dfrac{z}{2}$ より，$(*)$ の左辺は，

$$((*)\text{の左辺}) = \iint_S \mathrm{rot}\,\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_S \frac{z}{2}\underbrace{dS}_{\frac{1}{|\cos\gamma|}dx\,dy = \frac{2}{z}dx\,dy} = \iint_M \cancel{\frac{z}{2}}\cdot\cancel{\frac{2}{z}}\,dx\,dy$$

$$\therefore\ ((*)\text{の左辺}) = \underbrace{\iint_M dx\,dy}_{\text{半径 }2\text{ の円の面積 }\pi\cdot 2^2 = 4\pi} = \pi\cdot 2^2 = \underline{\underline{4\pi}} \quad \cdots\cdots ①$$ となる。

(ii) 次に，閉曲線 C において，$z=0$ より，

$$\boldsymbol{f} = [-2xy-y,\ \cancel{2\underbrace{z}_{0}}-x^2,\ 2y] = [-2xy-y,\ -x^2,\ 2y]$$



よって，$(*)$の右辺は，

$$((*)\text{の右辺}) = \oint_C \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{p}$$

$$= \oint_C \{(-2xy-y)\,dx + (-x^2)\,dy + \cancel{2y\cdot\underbrace{dz}_{0\ (\because z=0)}}\}$$

ここで，$x = 2\cos t$，$y = 2\sin t$ $(0 \leqq t \leqq 2\pi)$ とおくと，

$dx = -2\sin t\,dt$，$dy = 2\cos t\,dt$ より，

$$((*)\text{の右辺}) = \int_0^{2\pi}\{\underbrace{(-8\sin t\cos t - 2\sin t)}_{-2xy-y}\underbrace{(-2\sin t)dt}_{dx} \underbrace{-4\cos^2 t}_{-x^2}\cdot\underbrace{2\cos t\,dt}_{dy}\}$$

$$= \cancel{16\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt}_{\frac{1}{3}[\sin^3 t]_0^{2\pi}=0}} + 4\underbrace{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt}_{(*1)} - \cancel{8\underbrace{\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt}_{(*2)}}$$

$(*1)$: $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = \frac{1}{2}\left[t - \cancel{\frac{1}{2}\sin 2t}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\times 2\pi = \pi$

$(*2)$: $\displaystyle\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)\cdot\cos t\,dt$

$\left[\begin{array}{l}\sin t = u \text{ とおくと，}\\ t : 0 \to 2\pi,\ u : 0 \to 0\\ \cos t\,dt = du \text{ より，}\end{array}\right]$

$\displaystyle\int_0^0 (1-u^2)du = 0$

$$= \underline{\underline{4\pi}} \quad \cdots\cdots ②$$ となる。

以上 (i), (ii) の①, ②より，$(*)$の両辺は共に 4π となるので，ストークスの定理 $(*)$が成り立つことが確認できた。……………………………………(終)