演習問題 26 ● エルミート行列の対角化(Ⅰ)●

エルミート行列 $A_H = \begin{bmatrix} -1 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix}$ を，ユニタリ行列 U_U を用いて，

$U_U^{-1} A_H U_U$ として，対角化せよ。

ヒント！ 固有方程式 $|T| = |A_H - \lambda E| = 0$ を解いて，固有値 λ_1, λ_2 を求め，これに対応する大きさ 1 の固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ を求めるんだね。そして，ユニタリ行列 $U_U = [\boldsymbol{u}_1 \ \boldsymbol{u}_2]$ を作って，$U_U^{-1} A_H U_U$ により行列 A_H を対角化すればいい。

解答＆解説

$T = A_H - \lambda E$ とおいて，$T\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ……① とする。

$T = A_H - \lambda E = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 1+2i \\ 1-2i & 3-\lambda \end{bmatrix}$ より，固有方程式：

$$|T| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1+2i \\ 1-2i & 3-\lambda \end{vmatrix} = \underbrace{(-1-\lambda)(3-\lambda)}_{(\lambda+1)(\lambda-3) = \lambda^2 - 2\lambda - 3} - \underbrace{(1+2i)(1-2i)}_{1^2 - 4i^2 = 1+4 = 5} = 0 \text{ より，}$$

$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \qquad (\lambda+2)(\lambda-4) = 0$

$\therefore \lambda = -2, \ 4$ となる。(ここで，$\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = 4$ とおく)

(i) $\lambda_1 = -2$ のとき，①を $T\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$，そして，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1+2i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \} r = 1$$

よって，$\alpha_1 + (1+2i)\alpha_2 = 0$ より，

$\alpha_2 = k_1$ とおくと，

$\alpha_1 = -(1+2i)k_1$ となる。

よって，$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1-2i \\ 1 \end{bmatrix}$

ここで，$k_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は正規化される。これを $\boldsymbol{u}_1$ とおくと，

ここで，$\boldsymbol{x}_1' = \begin{bmatrix} -1-2i \\ 1 \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|\boldsymbol{x}_1'\|^2 = \boldsymbol{x}_1' \cdot \boldsymbol{x}_1' = {}^t\boldsymbol{x}_1' \overline{\boldsymbol{x}}_1'$

$= (-1-2i)(-1+2i) + 1^2$

$= 1 - 4i^2 + 1 = 1 + 4 + 1 = 6$

$\therefore \|\boldsymbol{x}_1'\| = \sqrt{6}$ より，

$k_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_1$ は正規化されて，$\boldsymbol{u}_1$ となる。

$\therefore\ \boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1-2i \\ 1 \end{bmatrix}$ ……② となる。

(ⅱ) $\lambda_2 = 4$ のとき，①を $T\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$，そして，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$ とおくと，

$$\begin{bmatrix} -5 & 1+2i \\ 1-2i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

よって，$(1-2i)\beta_1 - \beta_2 = 0$ より，

$\beta_1 = k_2$ とおくと，

$\beta_2 = (1-2i)k_2$ となる。

$$\begin{bmatrix} -5 & 1+2i \\ 1-2i & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ -5 & 1+2i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \}r=1$$

よって，$\boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = k_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$

ここで，$k_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2$ は正規化される。これを $\boldsymbol{u}_2$ とおくと，

$\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$ ……③ となる。

ここで，$\boldsymbol{x}_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$ とおくと，

$\|\boldsymbol{x}_2'\|^2 = \boldsymbol{x}_2' \cdot \boldsymbol{x}_2' = {}^t\boldsymbol{x}_2'\,\overline{\boldsymbol{x}_2'}$

$= 1^2 + (1-2i)(1+2i)$

$= 1 + 1 - 4i^2 = 1 + 1 + 4 = 6$

$\therefore\ \|\boldsymbol{x}_2'\| = \sqrt{6}$ より，

$k_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ とおくと，$\boldsymbol{x}_2$ は正規化されて，$\boldsymbol{u}_2$ となる。

以上(ⅰ)(ⅱ)の②，③より，ユニタリ行列 U_U を

$U_U = [\boldsymbol{u}_1\ \ \boldsymbol{u}_2] = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1-2i & 1 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$ とおくと，

エルミート行列 $A_H = \begin{bmatrix} -1 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix}$ は，$U_U^{-1}A_HU_U$ により，

$U_U^{-1}A_HU_U = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ と対角化できる。 ……………………………(答)

参考

$U_U^{-1} = {}^t\overline{U_U} = \overline{\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1-2i & 1 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1+2i & 1 \\ 1 & 1+2i \end{bmatrix}$ となるので，

$U_U^{-1}A_HU_U = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1+2i & 1 \\ 1 & 1+2i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1+2i \\ 1-2i & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1-2i & 1 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$ を

実際に計算して，$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ となることを，確認されるとよい。