Appendix （付録）

自動制御入門

これまで学習した“**ラプラス変換**”は，実は“**自動制御**”理論にも応用することができる。

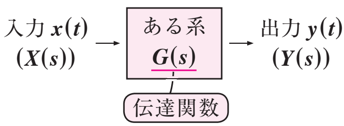
自動制御理論とは，電気回路や機械モデルなど…の様々なシステムに，たとえば電圧や力などの“**入力**”$x(t)$ (t：時刻) が与えられたとき，どのような“**出力 (応答)**”$y(t)$ (たとえば，電流や変位など…) が生じるかを調べ，その制御を行うための学問なんだね。

ここでは，“**インパルス応答**”と“**インディシャル応答**”を中心に，自動制御の基本について解説することにしよう。

● まず，伝達関数を押さえよう！

関数 $y=f(x)$ の場合，独立変数 x にある値 x_1 を代入すると，$y_1=f(x_1)$ となって，y の値 y_1 が決定する。これと同様に，電気系，機械系，流体系，熱力学系，など…，ある系 (システム) に，電圧や力や水位や熱など…，時刻 t により変化する入力 $x(t)$ を加えると，それに応答して，ある出力 $y(t)$ が生じる。この様子を，図 1 に模式図として示す。図 1 の $X(s)$ や $Y(s)$ は，それぞれ入力 $x(t)$，出力 $y(t)$ のラプラス変換のことだ。つまり，

図 1　入力と出力の関係



$x(t) \longleftrightarrow X(s)$,　$y(t) \longleftrightarrow Y(s)$　　なんだね。大丈夫？

$$\left(X(s)=\int_0^{\infty} x(t)\cdot e^{-st}dt,\quad Y(s)=\int_0^{\infty} y(t)\cdot e^{-st}dt \right)$$

そして，$X(s)$ と $Y(s)$ の関係式は，この系がもつ“**伝達関数**(でんたつ)”(*transfer function*) と呼ばれる s の関数 $G(s)$ により，次のように簡単に表現できる。

$$Y(s)=G(s)\cdot X(s) \cdots\cdots (*1)$$

この伝達関数 $G(s)$ は，与えられた系特有の関数であり，入力の性質や大きさとは無関係なんだ。そして，入力 $X(s)$ や出力 $Y(s)$ の関係が，$(*1)$ のような単純な式で表せるので，時刻 t における入力 $x(t)$ や出力 $y(t)$ の代わりに，これらのラプラス変換 $X(s)$ や $Y(s)$ を利用することになるんだね。

では，どのようにして，$(*1)$ の公式が導けるのか？これから解説しよう。一般論として，ある系に加えられる入力 $x(t)$ と，その結果生じる出力 $y(t)$ が，次の微分方程式をみたすものとしよう。

$$b_n\frac{d^ny}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_1\frac{dy}{dt}+b_0y$$
$$=a_m\frac{d^mx}{dt^m}+a_{m-1}\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+\cdots+a_1\frac{dx}{dt}+a_0x \quad \cdots\cdots①$$

(ただし，m，n は，0 以上の整数)

ここで，①の両辺をラプラス変換するんだけれど，このとき単純化して，すべての初期値を 0 とすることにしよう。つまり，$k=0,\ 1,\ 2,\cdots$ のとき

・$\mathcal{L}[y^{(k)}(t)]=s^kY(s)-\{\cancel{s^{k-1}\underbrace{y(0)}_{0}}+\cancel{s^{k-2}\underbrace{y'(0)}_{0}}+\cdots+\cancel{s\underbrace{y^{(k-2)}(0)}_{0}}+\cancel{\underbrace{y^{(k-1)}(0)}_{0}}\}$

$=s^kY(s)$ とし，また，

・$\mathcal{L}[x^{(k)}(t)]=s^kX(s)-\{\cancel{s^{k-1}\underbrace{x(0)}_{0}}+\cancel{s^{k-2}\underbrace{x'(0)}_{0}}+\cdots+\cancel{s\underbrace{x^{(k-2)}(0)}_{0}}+\cancel{\underbrace{x^{(k-1)}(0)}_{0}}\}$

$=s^kX(s)$ とするんだね。

この初期条件の下で，①の両辺をラプラス変換すると，ラプラス変換の線形性より，

$$b_n\cdot\underbrace{\mathcal{L}[y^{(n)}(t)]}_{s^n\cdot Y(s)}+b_{n-1}\cdot\underbrace{\mathcal{L}[y^{(n-1)}(t)]}_{s^{n-1}Y(s)}+\cdots+b_1\cdot\underbrace{\mathcal{L}[y'(t)]}_{sY(s)}+b_0\cdot\underbrace{\mathcal{L}[y(t)]}_{Y(s)}$$
$$=a_m\cdot\underbrace{\mathcal{L}[x^{(m)}(t)]}_{s^m\cdot X(s)}+a_{m-1}\cdot\underbrace{\mathcal{L}[x^{(m-1)}(t)]}_{s^{m-1}X(s)}+\cdots+a_1\cdot\underbrace{\mathcal{L}[x'(t)]}_{sX(s)}+a_0\cdot\underbrace{\mathcal{L}[x(t)]}_{X(s)}$$

$$(b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0)\cdot Y(s)$$
$$=(a_ms^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1s+a_0)X(s)$$ となるので，

$$Y(s)=\underbrace{\frac{a_ms^m+a_{m-1}s^{m-1}+\cdots+a_1s+a_0}{b_ns^n+b_{n-1}s^{n-1}+\cdots+b_1s+b_0}}_{G(s)}X(s)\cdots\cdots②$$ となる。

ここで，②の右辺の有理式 $\dfrac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0} = G(s)$ とおくと，この $G(s)$ が，この系特有の伝達関数であり，②から

$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$ ……$(*1)$ が導けるんだね。

このように，微分方程式の中の $x(t)$ や $y(t)$ の第 k 次導関数 $x^{(k)}$，$y^{(k)}$ のラプラス変換は，すべての初期値を $\mathbf{0}$ として，

$\mathcal{L}[x^{(k)}] = s^k X(s)$，$\mathcal{L}[y^{(k)}] = s^k Y(s)$ と表し，

また，もしある系の $x(t)$ と $y(t)$ の関係式に k 重積分項がある場合，そのラプラス変換は

$\mathcal{L}\left[\int\int\cdots\int x(du)^k\right] = \dfrac{X(s)}{s^k}$，$\mathcal{L}\left[\int\int\cdots\int y(du)^k\right] = \dfrac{Y(s)}{s^k}$ とすればいいんだね。大丈夫？

● 基本要素の伝達関数を調べよう！

では，制御の対象となる系，すなわち制御系を構成する基本的な要素の具体的な伝達関数 $G(s)$ を調べてみよう。

(1) 比例要素

$x(t)$ と $y(t)$ が比例関係にある，つまり $y(t) = kx(t)$ （k：実数定数）の場合，両辺をラプラス変換して，$Y(s) = \underbrace{k}_{\text{伝達関数 } G(s)} X(s)$ より，

伝達関数 $G(s) = k$ である。また，この比例定数 k を **“ゲイン定数”** (*gain constant*) という。

(2) 微分要素

$x(t)$ と $y(t)$ が，$y(t) = k\dfrac{dx(t)}{dt}$ （k：実数定数）の関係にある場合，この両辺をラプラス変換して，$Y(s) = \underbrace{k \cdot s}_{\text{伝達関数 } G(s)} X(s)$ より

伝達関数 $G(s) = ks$ である。

(3) 積分要素

$x(t)$ と $y(t)$ が，$y(t) = k\int_0^t x(u)du$ （k：実数定数）の関係にある場合，

この両辺をラプラス変換して，$Y(s)=k\cdot\dfrac{X(s)}{s}=\underbrace{\dfrac{k}{s}}_{\text{伝達関数 } G(s)}X(s)$ より

伝達関数 $G(s)=\dfrac{k}{s}$ である。

(4) 1 次遅れ要素

伝達関数 $G(s)$ が，$G(s)=\dfrac{k}{1+Ts}$ （k：実数定数，T：時定数（じていすう）（*time constant*））となる系の要素を，“**1 次遅れ要素**”（*first order lag element*）というんだね。この 1 次遅れ要素の微分方程式が，どのようなものになるのか，調べてみよう。

$Y(s)=G(s)\cdot X(s)$ より，$Y=\dfrac{k}{1+Ts}\cdot X$ 　　この両辺に $1+Ts$ をかけて

$Y(1+Ts)=kX$ 　　$Y+T\cdot sY=kX$

この両辺をラプラス逆変換すると，

$\mathcal{L}^{-1}[Y+T\cdot sY]=\mathcal{L}^{-1}[kX]$ 　　$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[Y]}_{y}+\underbrace{T}_{\text{定数}}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[sY]}_{\frac{dy}{dt}}=\underbrace{k}_{\text{定数}}\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[X]}_{x}$ より，

この系（1 次遅れ要素）の微分方程式は，

$y+T\cdot\dfrac{dy}{dt}=kx$ 　　であることが導けるんだね。納得いった？

以上より，ある系の微分方程式から伝達関数 $G(s)$ を求めることができるし，逆に，伝達関数 $G(s)$ が分かっているとき，これから逆に系の微分方程式を導くこともできるんだね。次の例題で，系の微分方程式から $G(s)$ を求めてみよう。

(ex1) 入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ が関係式 $\dfrac{d^2y}{dt^2}+2y=\dfrac{dx}{dt}-x$ …①をみたすとき，

この系の伝達関数 $G(s)$ を求めてみよう。

①の両辺をラプラス変換すると，ラプラス変換の線形性より，

$\mathcal{L}\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}\right]+2\cdot\mathcal{L}[y]=\mathcal{L}\left[\dfrac{dx}{dt}\right]-\mathcal{L}[x]$ から，

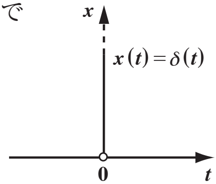
$s^2Y(s)+2Y(s)=sX(s)-X(s)$ 　　$(s^2+2)Y(s)=(s-1)X(s)$

$\therefore\ Y(s)=\dfrac{s-1}{s^2+2}X(s)$ より，この系の伝達関数 $G(s)=\dfrac{s-1}{s^2+2}$ である。

● インパルス応答とインディシャル応答を調べよう！

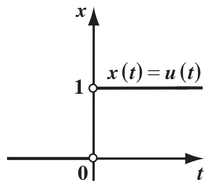
入力 $\underbrace{x(t)}_{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]} \longleftrightarrow \underbrace{X(s)}_{\mathcal{L}[x(t)]}$，出力 $\underbrace{y(t)}_{\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]} \longleftrightarrow \underbrace{Y(s)}_{\mathcal{L}[y(t)]}$，伝達関数 $\underbrace{g(t)}_{\mathcal{L}^{-1}[G(s)]} \longleftrightarrow \underbrace{G(s)}_{\mathcal{L}[g(t)]}$ とすると，

$Y(s) = G(s) \cdot X(s)$ ……$(*1)$ が成り立つんだった。ここで



(Ⅰ) $x(t) = \delta(t)$ (デルタ関数) のときの出力を "**インパルス応答**" (*impulse response*) と呼び，

(Ⅱ) $x(t) = u(t)$ (単位階段関数) のときの出力を "**インディシャル応答**" (*inditial response*) と呼ぶんだね。



(Ⅰ) インパルス応答の場合，入力 $x(t)=\delta(t)$ より

$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ ……① ← P70参照

①を $(*1)$ に代入すると，$Y(s) = G(s) \cdot 1 = G(s)$

よって，求めるインパルス応答 $y(t)$ は，

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$ となる。

(Ⅱ) インディシャル応答の場合，入力 $x(t) = u(t)$ より

$X(s) = \mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[u(t)] = \dfrac{1}{s}$ ……② ← P70参照

②を $(*1)$ に代入すると，$Y(s) = G(s) \cdot \dfrac{1}{s} = \dfrac{G(s)}{s}$

よって，求めるインディシャル応答 $y(t)$ は，

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{G(s)}{s}\right] = \displaystyle\int_0^t g(u)du$ となる。この $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{G(s)}{s}\right]$ はそのまま求めてもいいんだけれど，上述したように $g(u)$ を u で積分して求めても構わない。

それでは，早速，次の例題で，インパルス応答とインディシャル応答を具体的に求めてみることにしよう。

$(ex2)$ 1 次遅れ要素の伝達関数 $G(s) = \dfrac{1}{1+Ts}$ $(T$：時定数，$k=1)$ について，

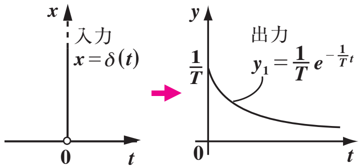
(ⅰ) インパルス応答と (ⅱ) インディシャル応答を求めてみよう。

(ⅰ)インパルス応答は，入力 $x(t)=\delta(t)$，$X(s)=\mathcal{L}[\delta(t)]=1$ のときの出力 $y_1=g(t)$ のことなので，

$$y_1=g(t)=\mathcal{L}^{-1}[G(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1+Ts}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{T}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]=\underbrace{\frac{1}{T}}_{\text{定数}}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]$$

$$=\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}\ \text{となる。}\quad\leftarrow\ \text{公式}\ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right]=e^{at}$$

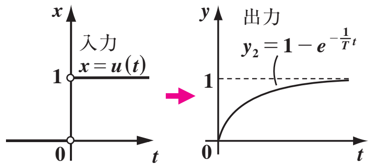


(ⅱ)インディシャル応答は，入力 $x(t)=u(t)$，$X(s)=\mathcal{L}[u(t)]=\frac{1}{s}$ のときの出力 $y_2(t)$ のことなので，

$$y_2=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right]$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(1+Ts)}\right]=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\right]$$

$$=1-e^{-\frac{1}{T}t}\ \text{となるんだね。}$$



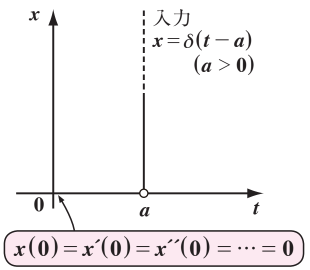
もちろん，インディシャル応答 y_2 は，インパルス応答 $y_1=g(t)$ を次のように積分して，

$$y_2=\int_0^t \underbrace{g(u)}_{\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}u}}du=\frac{1}{T}\int_0^t e^{-\frac{1}{T}u}du=\frac{1}{T}\left[-Te^{-\frac{1}{T}u}\right]_0^t=-\left(e^{-\frac{1}{T}t}-1\right)=1-e^{-\frac{1}{T}t}$$

と求めても構わない。

しかし，ここで，疑問をもたれた方もいらっしゃると思う。…，そう，これまでの自動制御理論は，$x(t)$，$x'(t)$，$x''(t)$，… や $y(t)$，$y'(t)$，$y''(t)$，… の初期値はすべて 0 という前提条件の下で，解説してきたんだね。でも，(ⅰ)インパルス応答の入力の初期値は $x(0)=\delta(0)=+\infty$ であるし，(ⅱ)インディシャル応答の入力の初期値は $x(0)=u(0)$ となって，これは定義できないんだね。果たして，$(ex2)$ のような計算が許されるのだろうか？…ということだろうね。当然の疑問だと思う。ここでは，$(ex2)$(ⅰ)のインパルス応答の問題を例にとって答えておこう。

まず，入力の初期値の条件をみたすため，入力のデルタ関数を右図に示すように，$a(>0)$ だけ平行移動して，



$x(t)=\delta(t-a)$ としよう。

すると，$x=0$ において，$x(0)=x'(0)=x''(0)=\cdots=0$ となって，入力の初期値の条件は満たされるね。このとき，このラプラス変換 $X(s)$ は，

$X(s)=\mathcal{L}[x(t)]=\mathcal{L}[\delta(t-a)]=e^{-as}$ ……②となる。

公式(P70) $\mathcal{L}[\delta(t-a)]=e^{-as}$

よって，②を $Y(s)=G(s)\cdot X(s)$ ……(∗1) に代入すると，

$$Y(s)=\frac{1}{1+Ts}\cdot e^{-as}=\frac{e^{-as}}{1+Ts} \quad \text{……③}$$ となる。

ここで，$F(s)=\dfrac{1}{1+Ts} \longleftrightarrow f(t)$ とおくと，$f(t)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\dfrac{1}{T}\cdot e^{-\frac{1}{T}t}$

これは，(ex2)(ⅰ)で計算している。

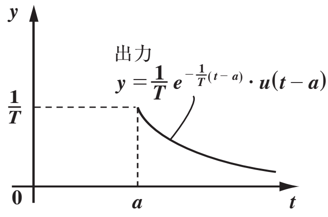
となる。

よって，ラプラス逆変換の公式：

$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\cdot F(s)]=f(t-a)\cdot u(t-a)$ (P122) を用いて，③を逆変換して出力 $y(t)$ を求めると，

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]=\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}\cdot \underbrace{F(s)}_{\frac{1}{1+Ts}}]=\underbrace{\frac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}(t-a)}}_{f(t-a)}\cdot u(t-a)$$

となるので，出力 $y(t)$ のグラフは，右図のようになる。これは，P219 で求めたインパルス応答 $y_1=\dfrac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$ $(t\geqq 0)$ を，t 軸方向に a だけ平行移動したものに他ならない。



つまり，この入力 $x=\delta(t-a)$ と出力 $y=\dfrac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}(t-a)}\cdot u(t-a)$ はともにインパルス応答の入力 $x=\delta(t)$ と出力 $y_1=\dfrac{1}{T}e^{-\frac{1}{T}t}$ を，t 軸方向に a だけ平行

移動したものになっている。したがって，この計算結果に対して，$a \to +0$ の極限をとれば，インパルス応答の入・出力に帰着することが示せたんだね。納得いった？

インディシャル応答に対しても，同様に示せるので，御自身で確認されるといいと思う。

以上より，

(Ⅰ) 入力 $x=\delta(t)$ の結果生じるインパルス応答は $y=g(t)$ であり，

(Ⅱ) 入力 $x=u(t)$ の結果生じるインディシャル応答は $y=\int_0^t g(u)du$ となるんだね。しっかり，頭に入れておいて頂きたい。

以上で，本当の初歩ではあるのだけれど，これで自動制御入門の講義も終了です。ラプラス変換とその逆変換が随所に使われていたので，ラプラス変換の応用として興味をもって頂けたと思う。

自動制御は，現代の工業技術を支える重要で実践的な理論なので，興味を持たれた方は，今回の講義を基にして，さらに本格的に学習していかれることをお勧めします。