演習問題 10 ● 2 次元波動方程式 ●

関数 $u(x, y, t)$ について，次の 2 次元波動方程式を解け。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \cdots\cdots ① \qquad (0<x<4,\ 0<y<4,\ 0<t)$$

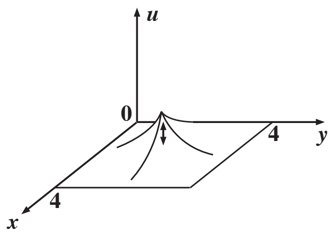
$$\begin{cases} \text{初期条件：} u(x, y, 0)=\dfrac{1}{32}(2-|x-2|)(2-|y-2|),\ u_t(x, y, 0)=0 \\ \text{境界条件：} u(0, y, t)=u(4, y, t)=u(x, 0, t)=u(x, 4, t)=0 \end{cases}$$

ヒント！ 変数分離法を使って，$u(x, y, t)=X(x)Y(y)T(t)$ とし，X, Y, T の 3 つの独立した微分方程式にもち込み，それらの解を求めるんだね。さらに，2 重フーリエサイン級数展開を利用して，係数を決定すればいいんだね。その際，初期条件の式の形から $0 \leqq x \leqq 2,\ 2<x \leqq 4$ $(0 \leqq y \leqq 2,\ 2<y \leqq 4)$ と場合分けしないといけないことに注意しよう。

解答＆解説

与えられた条件より，右図に示すように，4 頂点 $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(4, 4, 0)$, $(0, 4, 0)$ からなる正方形の 4 辺で固定された正方形膜の振動問題になる。

図　正方形膜の振動



変数分離法を用いて，変位 $u(x, y, t)$ を次のようにおく。

$u(x, y, t)=X(x)\cdot Y(y)\cdot T(t)$ ……②

②を①に代入して

$X\cdot Y\cdot \ddot{T}=X''\cdot Y\cdot T+X\cdot Y''\cdot T$ となる。

この両辺を XYT で割ると，

$\dfrac{\ddot{T}}{T}=\dfrac{X''}{X}+\dfrac{Y''}{Y}$ ……③ となる。

③の左辺は t (時刻) のみの式，右辺は x と y のみの式より，③の等式が恒等的に成り立つためには，これはある定数 α と等しくなければならない。

ここで，$\alpha \geqq 0$ とすると不適。よって，
$\alpha < 0$ より，$\alpha = -\omega^2 (\omega > 0)$ とおくと，

$$\frac{\ddot{T}}{T} = \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{新たに}-\omega_1^2} + \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{-\omega_2^2\text{とおく}} = -\omega^2 \quad \cdots\cdots ③'$$

(i) $\alpha > 0$ のとき，$\frac{X''}{X} = \alpha_1$，$\frac{Y''}{Y} = \alpha_2$ ($\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$，$\alpha > 0$) とおくと，$\alpha_1$ か α_2 のいずれか一方が正。よって，$\alpha_1 > 0$ とすると，$X'' = \alpha_1 X (\alpha_1 > 0)$ より，特性方程式:$\lambda^2 - \alpha_1 = 0$ から，$\lambda = \pm\sqrt{\alpha_1}$　$\therefore X = A_1 e^{\sqrt{\alpha_1}x} + A_2 e^{-\sqrt{\alpha_1}x}$
ここで，境界条件：$X(0) = X(4) = 0$ より，$A_1 = A_2 = 0$ となって $X(x) = 0$ となる。よって不適。
$\alpha_2 > 0$ のときも，同様に不適。
(ii) $\alpha = 0$ のとき，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ の場合も考えられる。$X'' = 0$ より $X = px + q$。同様に境界条件より，$p = q = 0$ となり，$X = 0$ となる。よって，不適。

ここで，新たに

$$\frac{X''}{X} = -\omega_1^2,\quad \frac{Y''}{Y} = -\omega_2^2,$$

$(\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2)$ とおくと，③′ より
次の **3** つの常微分方程式が導かれる。

$$\begin{cases} \text{(i)}\ X'' = -\omega_1^2 X \quad \cdots\cdots ④ \\ \text{(ii)}\ Y'' = -\omega_2^2 Y \quad \cdots\cdots ⑤ \\ \text{(iii)}\ \ddot{T} = -\omega^2 T \quad \cdots\cdots ⑥ \quad (\omega_1^2 + \omega_2^2 = \omega^2) \end{cases}$$

(i) $X'' = -\omega_1^2 X$ ……④は単振動の微分方程式より，その解は，

$X(x) = \cancel{A_1 \cos\omega_1 x} + A_2 \sin\omega_1 x$ となる。

ここで境界条件：

$u(0,\ y,\ t) = u(4,\ y,\ t) = 0$ より，

$X(0) = A_1 = 0$，$X(4) = A_2 \sin \underbrace{4\omega_1}_{k\pi} = 0$

$\underbrace{u(0,\ y,\ t)}_{X(0)Y(y)T(t)} = \underbrace{u(4,\ y,\ t)}_{X(4)Y(y)T(t)} = 0$ より
$X(0) = 0$ かつ $X(4) = 0$

よって，$A_1 = 0$, $\omega_1 = \frac{k\pi}{4}$　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ より，

$\therefore X(x) = A_2 \sin \frac{k\pi}{4} x$ ……⑦となる。

(ii) $Y'' = -\omega_2^2 Y$ ……⑤も，単振動の微分方程式より，その解は，

$Y(y) = \cancel{B_1 \cos\omega_2 y} + B_2 \sin\omega_2 y$

となる。ここで境界条件：

$u(x,\ 0,\ t) = u(x,\ 4,\ t) = 0$ より

$Y(0) = B_1 = 0$，$Y(4) = B_2 \sin \underbrace{4\omega_2}_{j\pi} = 0$

$\underbrace{u(x,\ 0,\ t)}_{X(x)Y(0)T(t)} = \underbrace{u(x,\ 4,\ t)}_{X(x)Y(4)T(t)} = 0$ より
$Y(0) = 0$ かつ $Y(4) = 0$

よって，$B_1 = 0$，$\omega_2 = \frac{j\pi}{4}$　$(j = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ より

$\therefore\ Y(y)=B_2\sin\dfrac{j\pi}{4}y$ ……⑧となる。

(iii) $\ddot{T}=-\omega^2 T$ ……⑥も，単振動の微分方程式より，その解は，

$T(t)=C_1\cos\omega t+\cancel{C_2\sin\omega t}$ (C_1，C_2：定数係数)となる。この両辺を

t で微分して，$\dot{T}(t)=-C_1\omega\sin\omega t+C_2\omega\cos\omega t$

$\dot{T}(0)=C_2\omega=0$ より，$C_2=0$ $(\because\ \omega>0)$

初期条件
$\underbrace{u_t(x,\ y,\ 0)}_{X(x)Y(y)\dot{T}(0)}=0$ より $\dot{T}(0)=0$

また，(i)，(ii)の結果より

$\omega^2=\omega_1{}^2+\omega_2{}^2=\left(\dfrac{k\pi}{4}\right)^2+\left(\dfrac{j\pi}{4}\right)^2=\dfrac{(k^2+j^2)\pi^2}{16}$ より，$\omega=\dfrac{\sqrt{k^2+j^2}\,\pi}{4}$ となる。

$\therefore\ T(t)=C_1\cos\dfrac{\sqrt{k^2+j^2}\,\pi}{4}t$ ……⑨となる。

以上(i)(ii)(iii)の⑦，⑧，⑨より，①の微分方程式の独立解 $u_{kj}(x,\ y,\ t)$ は，

$u_{kj}(x,\ y,\ t)=b_{kj}\sin\dfrac{k\pi}{4}x\cdot\sin\dfrac{j\pi}{4}y\cdot\cos\dfrac{\sqrt{k^2+j^2}\,\pi}{4}t$ ……⑩となる。

(b_{kj}：係数，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ j=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

そして，この⑩を2重に重ね合わせた2重フーリエ級数を $u(x,\ y,\ t)$ とおくと，これも①の解となる。よって，

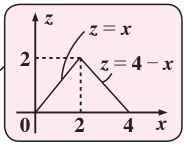
$$u(x,\ y,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{kj}\sin\frac{k\pi}{4}x\cdot\sin\frac{j\pi}{4}y\cdot\cos\frac{\sqrt{k^2+j^2}\,\pi}{4}t\ \cdots\cdots ⑪$$

ここで，$t=0$ のとき，⑪は，次のようになる。

$$u(x,\ y,\ 0)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{kj}\sin\frac{k\pi}{4}x\cdot\sin\frac{j\pi}{4}y\ \cdots\cdots ⑪'\quad(\because\ \cos 0=1)$$

ここで，初期条件：$u(x,\ y,\ 0)=\dfrac{1}{32}(\underline{2-|x-2|})(2-|y-2|)$ より，

$$2-|x-2|=\begin{cases}\cdot\ x & (0\leqq x\leqq 2)\\ \cdot\ 4-x & (2\leqq x\leqq 4)\end{cases}$$



⑪′の係数 b_{kj} は，2重フーリエサイン級数の公式を用いて，

2重フーリエサイン級数の公式(P198)

$f(x,\ y)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{kj}\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y$

$b_{kj}=\dfrac{4}{L_1L_2}\displaystyle\int_0^{L_1}\int_0^{L_2}f(x,\ y)\sin\frac{k\pi}{L_1}x\cdot\sin\frac{j\pi}{L_2}y\,dxdy$

$$b_{kj}=\frac{4}{4\cdot 4}\int_0^4\int_0^4 \frac{1}{32}(\underbrace{2-|x-2|}_{\begin{cases}\cdot\, x & (0\leqq x\leqq 2)\\ \cdot\, 4-x & (2\leqq x\leqq 4)\end{cases}})(\underbrace{2-|y-2|}_{\begin{cases}\cdot\, y & (0\leqq y\leqq 2)\\ \cdot\, 4-y & (2\leqq y\leqq 4)\end{cases}})\sin\frac{k\pi}{4}x\cdot\sin\frac{j\pi}{4}y\,dxdy$$

$$=\frac{1}{128}\underbrace{\int_0^4(2-|x-2|)\sin\frac{k\pi}{4}x\,dx}_{\lambda_k}\cdot\underbrace{\int_0^4(2-|y-2|)\sin\frac{j\pi}{4}y\,dy}_{\lambda_j\text{とおく}}$$

ここで，上記の **2** つの定積分をそれぞれ λ_k，λ_j とおくと，

$$\lambda_k=\underbrace{\int_0^2 x\cdot\sin\frac{k\pi}{4}x}_{①}+\underbrace{\int_2^4(4-x)\cdot\sin\frac{k\pi}{4}x}_{②}$$

積分区間を $0\leqq x\leqq 2$ と $2\leqq x\leqq 4$ に場合分けする

$$\begin{aligned}&\int_0^2 x\cdot\left(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{4}x\right)'dx\\&=-\frac{4}{k\pi}\left[x\cdot\cos\frac{k\pi}{4}x\right]_0^2\\&\quad+\frac{4}{k\pi}\int_0^2 1\cdot\cos\frac{k\pi}{4}x\,dx\\&=-\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{16}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi}{4}x\right]_0^2\\&=\cancel{-\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}}+\frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\int_2^4(4-x)\cdot\left(-\frac{4}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{4}x\right)'dx\\&=-\frac{4}{k\pi}\left[(4-x)\cos\frac{k\pi}{4}x\right]_2^4\\&\quad+\frac{4}{k\pi}\int_2^4(-1)\cdot\cos\frac{k\pi}{4}x\\&=\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{16}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi}{4}x\right]_2^4\\&=\cancel{\frac{8}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}}+\frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lambda_k=\frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{32}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

同様に，$\lambda_j=\dfrac{32}{j^2\pi^2}\sin\dfrac{j\pi}{2}$ より，　←λ_k の k に j を代入したもの

$$b_{kj}=\frac{1}{128}\cdot\lambda_k\cdot\lambda_j=\frac{8}{\pi^4}\cdot\frac{1}{k^2j^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{j\pi}{2}\quad\cdots\cdots⑫$$

となる。

⑫を⑪に代入して，求める①の **2** 次元波動方程式の解は，

$$u(x,\ y,\ t)=\frac{8}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{k^2j^2}\sin\frac{k\pi}{2}\cdot\sin\frac{j\pi}{2}\cdot\sin\frac{k\pi}{4}x\cdot\sin\frac{j\pi}{4}y\cdot\cos\frac{\sqrt{k^2+j^2}\pi}{4}t$$

となる。……………………………………………………………………（答）