それでは，マルコフ過程の例題を1題解いてみよう。

(ex1) 確率分布 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ が，次式をみたすものとする。

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ①$$

(ただし，$a_n + b_n = 1 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ とする。)

このとき，(i) $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ を求めよう。さらに

(ii) 極限 $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ が存在するものとして，$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ を求めよう。

初期分布 $\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ で，推移確率行列 $M = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ のマルコフ過程の問題だね。

(i) $n=0$ のとき，①より，

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} + \frac{1}{6} \\ \frac{1}{12} + \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ②$$

となる。次に，

$n=1$ のとき，①より，

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{7}{12} \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix} \quad (②より)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{35}{72} + \frac{5}{36} \\ \frac{7}{72} + \frac{5}{18} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{45}{72} \\ \frac{27}{72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} \\ \frac{3}{8} \end{bmatrix}$$

となるんだね。大丈夫？

(ii) 極限 $\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$ が，ベクトル $\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ に収束するとき，すなわち，

$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ となるとき，$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ となる。

よって，①の両辺に $n\to\infty$ の極限をとると，

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}} = \lim_{n\to\infty} M \underbrace{\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}} \text{ より，} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}}_{E\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \text{ とおく。}} = M\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots ③$$
となる。

③より，$\underbrace{(M-E)}_{\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ より，

これから，$\alpha - 2\beta = 0$ も導けるが，
これは，④と同じ式だね。

$-\alpha + 2\beta = 0$ ……④ となる。

また，$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha + \beta = 1$（全確率）より，

$\alpha + \beta = 1$ ……⑤ が成り立つ。

④＋⑤より，$3\beta = 1$ $\quad\therefore \beta = \frac{1}{3}$ $\quad$ ④より，$\alpha = 2\beta = \frac{2}{3}$

以上より，$n\to\infty$ のとき，$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ となる。すなわち，

$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となるんだね。これも大丈夫だった？